

# Hauteur asymptotique des points de Heegner

*En l'honneur du Professeur Henryk Iwaniec, pour l'ensemble de son oeuvre analytique et pour son titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Bordeaux 1.*

Guillaume Ricotta et Thomas Vidick

*Abstract.* Geometric intuition suggests that the Néron–Tate height of Heegner points on a rational elliptic curve  $E$  should be asymptotically governed by the degree of its modular parametrisation. In this paper, we show that this geometric intuition asymptotically holds on average over a subset of discriminants. We also study the asymptotic behaviour of traces of Heegner points on average over a subset of discriminants and find a difference according to the rank of the elliptic curve. By the Gross–Zagier formulae, such heights are related to the special value at the critical point for either the derivative of the Rankin–Selberg convolution of  $E$  with a certain weight one theta series attached to the principal ideal class of an imaginary quadratic field or the twisted  $L$ -function of  $E$  by a quadratic Dirichlet character. Asymptotic formulae for the first moments associated with these  $L$ -series and  $L$ -functions are proved, and experimental results are discussed. The appendix contains some conjectural applications of our results to the problem of the discretisation of odd quadratic twists of elliptic curves.

## 1 Description de la problématique

L'étude calculatoire systématique de la hauteur de Néron–Tate des points de Heegner sur différentes courbes elliptiques montre de grandes disparités. Si l'on considère deux courbes elliptiques de même conducteur  $N$ , alors les points de Heegner sur ces deux courbes sont l'image des mêmes points spéciaux de la courbe modulaire de niveau  $N$  notée  $X_0(N)$  par la paramétrisation modulaire et on s'attend donc à ce que leurs hauteurs soient dans le même rapport que les degrés de ces paramétrisations. Cependant, la figure 1 montre que le comportement des hauteurs est très irrégulier: même si les courbes 37A et 37B (dans la notation de Cremona [Cr]) ont le même conducteur et le même degré, les points paraissent légèrement plus gros sur la 37B que sur la 37A.

Nous allons montrer que l'intuition se vérifie asymptotiquement: à conducteur fixé<sup>1</sup>, la moyenne sur une certaine sous-classe de discriminants de la hauteur des points de Heegner est proportionnelle au degré.

Pour cela, nous allons procéder à partir de la formule de Gross–Zagier [GrZa] et raisonner sur les séries de Dirichlet et les fonctions  $L$  en nous servant principalement d'un résultat de H. Iwaniec [Iw].

---

Reçu par la rédaction le 2 novembre, 2005; revu le 13 juin, 2006.

Classification (AMS) par sujet: Primary: 11G50; secondary: 11M41.

©Société mathématique du Canada 2008.

<sup>1</sup>Toutefois, nous prendrons soin de garder explicite toute dépendance en le conducteur  $N$  de la courbe.

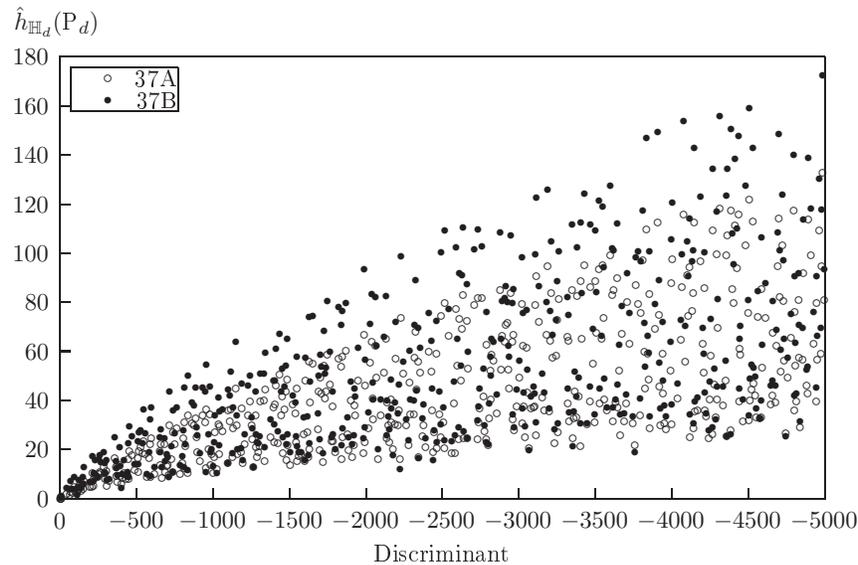


Figure 1: Comportement des points de Heegner sur les courbes 37A et 37B.

## 2 Préliminaires

Soit  $X_0(N)$  la courbe modulaire de niveau  $N$  classifiant les paires de courbes elliptiques  $(E_1, E_2)$  reliées par une isogénie cyclique de degré  $N$ . Une description analytique sur  $\mathbb{C}$  de cette courbe est donnée par le quotient du demi-plan de Poincaré complété  $\mathbb{H} \cup (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})$  par l'action par homographies du groupe de congruence  $\Gamma_0(N)$ .

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$  de conducteur  $N$  sans facteurs carrés. A. Wiles et R. Taylor [Wi, TaWi] ont prouvé la *modularité* de  $E$  dont un corollaire important est l'existence d'une application non constante  $\Phi_{N,E} : X_0(N) \rightarrow E$  satisfaisant  $\Phi_{N,E}(\infty) = 0$  appelée *paramétrisation modulaire* de  $E$ . Le *degré* noté  $\text{deg}(\Phi_{N,E})$  de cette application est un invariant important et il est intéressant de connaître la croissance de celui-ci par rapport au conducteur  $N$ . Selon la conjecture du degré [Mu] et [De, p. 35] qui est équivalente à une des formes de la conjecture abc, on aurait

$$(2.1) \quad \text{deg}(\Phi_{N,E}) \ll_{\epsilon} N^{2+\epsilon}$$

pour tout  $\epsilon > 0$ .

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{D} := \{d \in \mathbb{Z}, d < 0, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}$$

de discriminants. Pour  $d$  dans  $\mathcal{D}$ , notons  $\mathbb{H}_d$  le corps de classe de Hilbert du corps quadratique imaginaire  $\mathbb{K}_d := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  et souvenons-nous que  $G_d := \text{Gal}(\mathbb{H}_d|\mathbb{K}_d)$  est isomorphe au groupe de classes  $Cl_d$  de  $\mathbb{K}_d$  de cardinal le nombre de classes  $h_d$ .

**Définition 2.1** Un point de Heegner de niveau  $N$  et de discriminant  $d$  est un couple ordonné  $(E_1, E_2)$  de courbes elliptiques muni d’une isogénie cyclique de degré  $N$  tel que  $E_1$  et  $E_2$  aient multiplication complexe par l’anneau des entiers  $\mathcal{O}_d$  de  $\mathbb{K}_d$ .

Notons  $SS(d, N)$  l’ensemble des racines carrées modulo  $2N$  de  $d$  modulo  $4N$ . Pour tout élément  $s$  de  $SS(d, N)$ , désignons par  $\mathfrak{n}(s)$  l’idéal entier primitif de norme  $N$  suivant

$$\mathfrak{n}(s) := \left( N, \frac{s + \sqrt{d}}{2} \right).$$

Selon [Wa2, Théorème 2.6], l’ensemble des points de Heegner de niveau  $N$  et de discriminant  $d$  est en bijection avec  $SS(d, N) \times Cl(d)$  de la façon suivante : si  $[\mathfrak{a}]$  est l’élément du groupe de classes  $Cl_d$  associé à l’idéal entier primitif  $\mathfrak{a}$  de  $\mathcal{O}_d$  et  $s$  est un élément de  $SS(d, N)$  alors  $(\mathbb{C}/\mathfrak{a}, \mathbb{C}/\mathfrak{an}(s)^{-1})$  est un point de Heegner de niveau  $N$  et de discriminant  $d$ . Le point du demi-plan de Poincaré modulo  $\Gamma_0(N)$  correspondant à ce point de Heegner est donné par  $\frac{-B + \sqrt{d}}{2A}$  modulo  $\Gamma_0(N)$  où  $(A, B, C)$  est la forme quadratique de discriminant  $d$  correspondant à  $[\mathfrak{a}]$  et où  $N \mid A$  et  $B \equiv s \pmod{2N}$ .

**Définition 2.2** Un point de Heegner de niveau  $N$  et de discriminant  $d$  sur  $E$  est l’image par la paramétrisation modulaire  $\Phi_{N,E} : X_0(N) \rightarrow E$  d’un point de la forme

$$(E_1, E_2) = (\mathbb{C}/\mathfrak{a}, \mathbb{C}/\mathfrak{an}(s)^{-1}),$$

où  $\mathfrak{a}$  est un idéal de l’anneau des entiers  $\mathcal{O}_d$  de  $\mathbb{K}_d$ .

Notons  $P_d = \Phi_{N,E}((E_1, E_2))$ . Ce point ne dépend que de la classe de  $\mathfrak{a}$  dans le groupe de classes de  $\mathbb{K}_d$  (une fois  $E$  et  $d$  fixés). Notons également  $\text{Tr}_d = \text{Tr}_{\mathbb{H}_d|\mathbb{K}_d}(P_d)$ . Les points de Heegner sont définis sur  $E(\mathbb{H}_d)$  et sont permutés par  $G_d$  [Gr].

Si  $R$  est un corps de nombres, alors  $\widehat{h}_R(P)$  désigne la hauteur de Néron–Tate prise sur  $R$  du point  $P$  à coordonnées dans  $R$ . Ainsi, si  $\widehat{h}(P)$  est la hauteur canonique de Néron–Tate comme définie dans [Si, VIII.9] du point  $P$  à coordonnées dans  $R$ , alors  $\widehat{h}(P) = [R:\mathbb{Q}]^{-1} \widehat{h}_R(P)$  de sorte que si  $S$  est une extension de degré fini de  $R$ , alors  $\widehat{h}_S(P) = [S:R] \widehat{h}_R(P)$ . Le but de cet article est d’étudier la valeur en moyenne, sur les  $d$  dans  $\mathcal{D}$  des deux objets suivants :

- $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$ , hauteur de Néron–Tate sur  $\mathbb{H}_d$  d’un quelconque des  $h_d$  points de Heegner définis ci-dessus. Puisque  $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}$  est invariante sous l’action de  $G_d$ , cette hauteur est indépendante du point choisi,
- $\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d)$ , hauteur de Néron–Tate de la trace sur  $\mathbb{K}_d$  d’un quelconque des points de Heegner  $P_d$  définis ci-dessus.

B. H. Gross et D. Zagier [GrZa] ont relié  $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$  à la valeur de la dérivée en 1 de la série de Dirichlet obtenue en effectuant le produit de la fonction  $L$  de Dirichlet associée au caractère primitif réel  $\chi_d(m) := \left(\frac{d}{m}\right)$  de conducteur  $|d|$  du corps  $\mathbb{K}_d$  (le caractère de Kronecker du corps) par la convolution de Rankin–Selberg de  $L(E|\mathbb{Q}, s) := \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$  avec la fonction zeta  $\sum_{n \geq 1} r_d(n) n^{-s}$  de la classe des idéaux

principaux de  $\mathbb{K}_d$ , c'est-à-dire

$$(2.2) \quad L_d(E, s) := \left( \sum_{\substack{m \geq 1 \\ (m, N)=1}} \frac{\chi_d(m)}{m^{2s-1}} \right) \times \left( \sum_{n \geq 1} \frac{a_n r_d(n)}{n^s} \right),$$

où  $r_d(n)$  désigne le nombre d'idéaux principaux de  $\mathbb{K}_d$  de norme  $n$  pour tout entier naturel non-nul  $n$ .

**Théorème 2.3 ([GrZa])** Si  $E$  est une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$  et  $d$  est dans  $\mathcal{D}$ , alors

$$(2.3) \quad L'_d(E, 1) = \frac{2\Omega_{E,N}}{u^2 \sqrt{-d}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d),$$

$$(2.4) \quad L'(E|\mathbb{K}_d, 1) = \frac{2\Omega_{E,N}}{u^2 \sqrt{-d}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d),$$

où  $L(E|\mathbb{K}_d, s)$  est la fonction  $L$  de  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}_d$ ,  $2u$  est le nombre de racines de l'unité de  $\mathbb{K}_d$  et  $\Omega_{E,N} = \text{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2)$  est le volume complexe de  $E$  (c'est-à-dire le double de l'aire d'un parallélogramme fondamental de  $E(\mathbb{C})$ ).

*Remarque 2.4.* Plus précisément, l'équation (2.3) est [GrZa, Théorème 6.1, §1] alors que l'équation (2.4) est [GrZa, Théorème 2.1, §V.2].

Nous rappelons finalement la relation évidente

$$\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) = \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) + \sum_{\sigma \in G_d \setminus \{\text{Id}\}} \langle P_d, P_d^\sigma \rangle_{\mathbb{H}_d}$$

entre nos deux objets d'étude. Ici,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_d}$  désigne la forme bilinéaire de Néron–Tate sur  $\mathbb{H}_d$ . Le troisième terme fait intervenir l'angle formé par les points de Heegner entre eux et il sera intéressant de l'analyser (voir §5).

### 3 Les traces

#### 3.1 Mise en place

Il est ici nécessaire de raisonner selon le rang de la courbe  $E$ . La fonction  $L$  de  $E$  sur  $\mathbb{Q}$  précédemment notée  $L(E|\mathbb{Q}, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$  est définie *a priori* sur  $\Re(s) > \frac{3}{2}$ . Selon les travaux de A. Wiles et de R. Taylor [Wi, TaWi], il existe une forme primitive cuspidale  $f$  de niveau  $N$ , de poids 2 et de caractère trivial telle que  $L(E|\mathbb{Q}, s) = L(f, s)$  sur  $\Re(s) > \frac{3}{2}$ . Ainsi, les travaux de E. Hecke [IwKo, Théorème 14.7]) assurent que  $L(E|\mathbb{Q}, s)$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}$  et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\left( \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^s \Gamma(s) L(E|\mathbb{Q}, s) = \omega \left( \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \right)^{2-s} \Gamma(2-s) L(E|\mathbb{Q}, 2-s),$$

où  $-\omega = \pm 1$  est la valeur propre de l'involution de Fricke de  $f$  définie par

$$f\left(-\frac{1}{qz}\right) = -\omega qz^2 f(z)$$

pour tout nombre complexe  $z$  de partie imaginaire strictement positive. Définissons pour tout discriminant  $d$  dans  $\mathcal{D}$  la fonction  $L$  de  $E$  sur  $\mathbb{Q}$  tordue par  $\chi_d$  sur  $\Re(s) > \frac{3}{2}$  par

$$L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \chi_d(n)}{n^s}.$$

La fonction  $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s)$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}$  et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\left(\frac{|d|\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s)L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) = \omega_d \left(\frac{|d|\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s)L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 2-s),$$

où  $\omega_d := \omega_{\chi_d(-N)} = -\omega$  [IwKo, Proposition 14.20]. Avec ces notations, la factorisation

$$(3.1) \quad L(E|\mathbb{K}_d, s) = L(E|\mathbb{Q}, s)L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s)$$

est valide [GrZa, (0.4),§IV]) d'où

$$L'(E|\mathbb{K}_d, 1) = L'(E|\mathbb{Q}, 1)L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) + L(E|\mathbb{Q}, 1)L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1).$$

Ainsi, l'étude de la hauteur des traces des points de Heegner en moyenne sur les discriminants  $d$  dans  $\mathcal{D}$  est ramenée à l'étude de la valeur au point critique des fonctions  $L$  tordues lorsque  $E$  est de rang analytique 1 et à l'étude des dérivées au point critique des fonctions  $L$  tordues lorsque  $E$  est de rang analytique 0 car alors  $\omega = +1$ . Mentionnons que le rang analytique de  $E$  est l'ordre d'annulation de  $L(E|\mathbb{Q}, s)$  au point critique  $s = 1$ .

### 3.2 Courbes de rang analytique 0

Rappelons le théorème obtenu par H. Iwaniec [Iw]. Avant cela, fixons une fois pour toutes les deux notations

$$\gamma(4N) := \#\{k^2 \in \mathbb{Z}/4N\mathbb{Z}, (k, 4N) = 1\},$$

et

$$(3.2) \quad c_N := \frac{3\gamma(4N)}{\pi^2 N} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1},$$

où  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers.

**Théorème 3.1** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et  $F$  est une fonction lisse à support compact dans  $\mathbb{R}_+$  et de moyenne strictement positive, alors*

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \alpha_N Y \log Y + \beta_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{23}{14}+\varepsilon} Y^{\frac{13}{14}+\varepsilon}\right),$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  où

$$(3.3) \quad \alpha_N := c_N L(1) \int_0^{+\infty} F(t) dt \neq 0,$$

et

$$\beta_N := c_N \int_0^{+\infty} F(t) \left( L'(1) + L(1) \left( \log \left( \frac{\sqrt{N}t}{2\pi} \right) - \gamma \right) \right) dt,$$

avec

$$L(s) := \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2s)}{\zeta^{(N)}(4s-2)} \left( \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} \right) \right) \mathcal{P}(s),$$

et

$$(3.4) \quad \mathcal{P}(s) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left( \frac{1}{1+1/p} + \left( \frac{1}{1+p} \right) \left( \frac{1+p^{2-4s} - (a_p^2 - 2p)p^{-2s}}{1+p^{1-2s}} \right) \right).$$

Remarque 3.2. Dans [Iw], la fonction  $L$  est définie par la série de Dirichlet suivante

$$L(s) = \sum_{\substack{n=k\ell^2 \\ k|N^\infty \\ (\ell, N)=1}} \frac{b_n}{n^s} \quad \text{avec } b_n := a_n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|n \\ p \nmid 2N}} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^{-1}$$

pour tout entier naturel non-nul  $n$ . Celle-ci peut se réécrire sous la forme

$$L(s) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left( 1 - \frac{a_p}{p^s} \right)^{-1} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left( 1 + \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{p^{2i}}}{p^{2is}} \right) \right) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|(2, N-1)}} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{p^{2i}}}{p^{2is}} \right)$$

ce qui permet de retrouver l'expression de  $L$  donnée dans le théorème en fonction du carré symétrique de  $E$  et du produit Eulerien  $\mathcal{P}$ . Signalons que l'holomorphicité de la fonction  $L(\text{Sym}^2 E, s)$  dans tout le plan complexe a été prouvée par Shimura [Sh] et que le produit Eulerien  $\mathcal{P}(s)$  est absolument convergent sur  $\Re(s) > \frac{3}{4}$  et y définit une fonction holomorphe.

Remarque 3.3. La valeur de la fonction  $L(\text{Sym}^2 E, s)$  au bord de la bande critique est reliée au degré de la paramétrisation modulaire  $\Phi_{N,E}: X_0(N) \rightarrow E$  de  $E$  [Wa, (1-1)] par la formule suivante analogue à celle du nombre de classes de Dirichlet

$$\frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} = \frac{\text{deg}(\Phi_{N,E})}{N c_E(N)^2},$$

où  $c_E(N)$  est la  $\Gamma_0(N)$ -constante de Manin de  $E$  qui est un entier relatif uniformément borné [Ed]. Ici, on utilise le fait que  $N$  est sans facteurs carrés à deux reprises :

- les fonctions  $L$  du carré symétrique de  $E$  motivique et analytique coïncident car les termes correctifs apparaissent seulement en les nombres premiers dont le carré divise le conducteur  $N$ ,
- lorsque  $E$  est une courbe de Weil  $X_0(N)$ -forte et  $N$  est impair, la constante de Manin vaut  $\pm 1$  selon les travaux de A. Abbes et E. Ullmo [AbUl], alors que J. Manin [Ma] a conjecturé que cette constante vaut  $\pm 1$  pour toute courbe de Weil  $X_0(N)$ -forte.

*Remarque 3.4.* Il semblerait que quelques petites erreurs de frappe dans la formule pour  $\alpha_N$  (et en fait pour  $c_N$  et  $L$ ) se soient glissées dans [Iw]. La valeur donnée ici est corrigée.

*Remarque 3.5.* Dans [Iw], la dépendance en le conducteur  $N$  de la courbe dans le terme d’erreur n’est pas explicite. Cependant, il suffit de reprendre les différentes majorations pour restituer celle-ci.

**Corollaire 3.6** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 0, alors*

$$(3.5) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) = C_{\text{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y + \frac{C_{\text{Tr}}^{(0)}}{2} \log(N) Y^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{L(E|\mathbb{Q}, 1)c_N}{3\Omega_{E,N}} \left( L'(1) - L(1) \left( \frac{2}{3} + \log(2\pi) + \gamma \right) \right) Y^{\frac{3}{2}} \\ + \mathcal{O}_\varepsilon \left( \frac{L(E|\mathbb{Q}, 1)}{\Omega_{E,N}} N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{20}{14} + \varepsilon} \right),$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ , où  $C_{\text{Tr}}^{(0)}$  est la constante définie par

$$C_{\text{Tr}}^{(0)} := \frac{2}{\pi} c_N \mathcal{P}(1) L(E|\mathbb{Q}, 1) \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} L_E$$

en notant  $L_E$  un produit de facteurs locaux correspondant aux facteurs Euleriens de  $L(E|\mathbb{Q}, s)$  et de  $L(\text{Sym}^2(E), s)$  en les nombres premiers divisant le conducteur

$$(3.6) \quad L_E := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left( 1 - \frac{a_p}{p} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{a_{p^2}}{p^2} \right).$$

**Preuve** Il suffit d’appliquer la formule de Gross–Zagier (2.4) et de prendre pour  $F$  une approximation lisse de la fonction qui vaut  $\frac{3}{2}\sqrt{t}$  sur  $[0, 1]$  et 0 en dehors de cet intervalle. Le corollaire découle alors de (3.1). ■

*Remarque 3.7.* À conducteur  $N$  fixé, le terme principal dans (3.5) est  $C_{\text{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y$  avec

$$C_{\text{Tr}}^{(0)} = \left( \frac{6}{\pi^3 c_E(N)^2} \mathcal{P}(1) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \right) \times L(E|\mathbb{Q}, 1) L_E \times \frac{\gamma(4N)}{N^2} \text{deg}(\Phi_{N,E})$$

et est donc proportionnel au degré de la paramétrisation modulaire. Par contre, si  $N = Y^a$  avec  $0 < a < \frac{1}{23}$  alors le deuxième terme de (3.5) est du même ordre de grandeur que le premier et le terme principal devient

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right) C_{\text{Tr}}^{(0)} Y^{\frac{3}{2}} \log Y.$$

C'est la principale raison pour laquelle nous avons rendu explicite la dépendance en le conducteur  $N$  de la courbe dans le terme d'erreur. Il serait aussi intéressant d'étudier l'influence des valeurs extrémales de  $L(E|\mathbb{Q}, 1)$  sur la moyenne des hauteurs des traces des points de Heegner. Malheureusement, cela ne semble pas vérifiable numériquement étant donné le temps de calcul nécessaire par les algorithmes à utiliser.

Le produit Eulerien  $\mathcal{P}(s)$  varie peu. En effet, si l'on effectue un développement limité du facteur local en le nombre premier  $p$  de  $\mathcal{P}(1)$ , on obtient

$$\mathcal{P}_p(1) = 1 - \frac{a_p^2 - 2p}{p^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

d'où l'existence d'une constante absolue  $C > 0$  ne dépendant pas de la courbe  $E$  considérée telle que

$$C \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{2}{p^2}\right) < \mathcal{P}(1) < C \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{2}{p^2}\right).$$

Finalement, les termes importants sont le degré de la paramétrisation modulaire, la valeur de la fonction  $L$  de la courbe au point critique 1, ainsi que le conducteur qui intervient en  $\gamma(4N)/N^2$ . À conducteur et degré fixés, les petits nombres premiers qui divisent le conducteur ont un rôle décisif et les hauteurs des traces ont alors tendance à être plus ou moins grandes suivant que  $E$  a réduction *multiplicative déployée* ou *non-déployée* en ces nombres premiers. Cette influence se voit très bien dans le cas des deux courbes de conducteur 26 (de rang analytique 0) dont les paramétrisations modulaires ont même degré 2 alors que les traces sont presque trois fois plus grosses sur la 26B que sur la 26A. Ceci s'explique analytiquement par le fait que 26 est divisible par 2 et que la 26A a réduction multiplicative déployée en 2 alors que la 26B a réduction multiplicative non-déployée. Ceci induit un facteur 3 entre les produits pour les nombres premiers  $p$  divisant le conducteur de ces courbes des facteurs Euleriens de leur fonction  $L$  en  $p$ . La figure 2 illustre cette différence de comportement. On voit également que la courbe représentant la somme des hauteurs des traces est très proche de la courbe théorique même si elle est relativement irrégulière. Rappelons que 0.0018 et 0.0050 sont les valeurs numériques de la constante  $C_{\text{Tr}}^{(0)}$  apparaissant dans le corollaire 3.6 pour les courbes 26A et 26B.

### 3.3 Courbes de rang analytique 1

Lorsque l'on considère une courbe de rang 1, on est amené à estimer la moyenne des valeurs en 1 des fonctions  $L$  tordues et non de leurs dérivées.

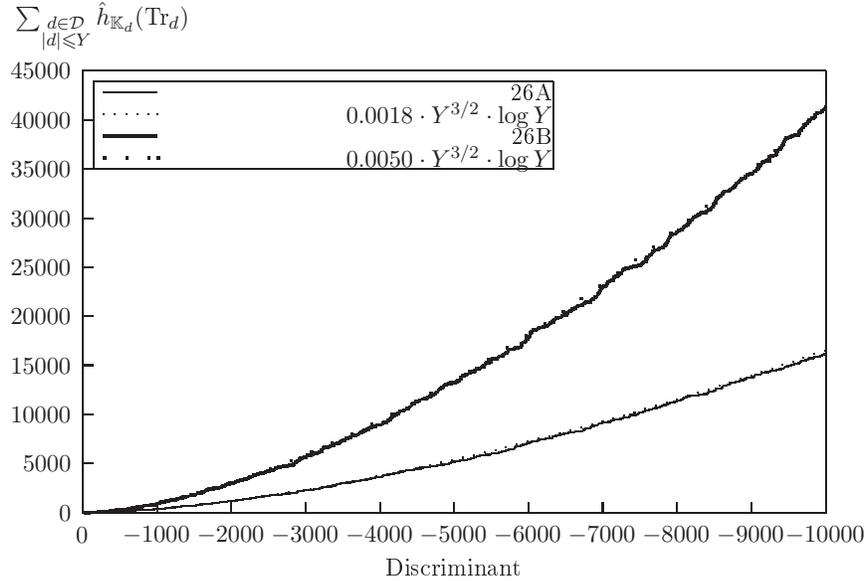


Figure 2: Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 26A et 26B : pratiques et théoriques.

**Théorème 3.8** Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 1 et  $F$  est une fonction lisse à support compact dans  $\mathbb{R}_+$  et de moyenne strictement positive, alors

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \alpha_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{13}{14} + \varepsilon}\right)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  où  $\alpha_N$  est définie en (3.3).

**Idée de preuve du théorème 3.8** Il n'est pas difficile d'adapter la démonstration de [Iw] à ce cas. En reprenant les notations de l'article, il suffit de remplacer la fonction  $V(X)$  [Iw, p. 369] par la fonction  $\tilde{V}(X) = e^{-X}$ . On a alors,<sup>2</sup>

$$\mathcal{A}(X, \chi_d) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s+1) \Gamma(s) \left(\frac{X}{2\pi}\right)^s ds.$$

La majoration  $\mathcal{A}(X, \chi_d) \ll \sqrt{X}$ , qui découle de l'inégalité de Hölder et d'une estimation des  $a_n$  tient toujours, et ainsi les majorations successives effectuées dans la démonstration ne posent pas de problème. La seule différence notable vient [Iw, p. 374] lors du calcul de  $\mathcal{B}(X)$ . On a alors

$$\text{Res}_{s=0} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s+1) \Gamma(s) \left(\frac{X}{2\pi}\right)^s = L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1),$$

et il n'apparaît pas de terme en  $\log X$ . ■

<sup>2</sup>À noter une erreur de frappe dans [Iw], il s'agit bien de  $\left(\frac{X}{2\pi}\right)^s$  et non de son inverse.

On en déduit comme pour le rang 0 le corollaire suivant.

**Corollaire 3.9** Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 1, alors

$$(3.7) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{K_d}(\text{Tr}_d) = C_{\text{Tr}}^{(1)} Y^{3/2} + \mathcal{O}_\varepsilon \left( \frac{L(E|\mathbb{Q}, 1)}{\Omega_{E,N}} N^{\frac{23}{14} + \varepsilon} Y^{\frac{20}{14} + \varepsilon} \right)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  où  $C_{\text{Tr}}^{(1)}$  est la constante définie par

$$C_{\text{Tr}}^{(1)} := \frac{2}{\pi} c_N \mathcal{P}(1) L'(E|\mathbb{Q}, 1) \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} L_E,$$

où  $c_N$  est définie en (3.2),  $L_E$  en (3.6) et  $\mathcal{P}$  en (3.4).

Remarque 3.10. À conducteur  $N$  fixé, le terme principal dans (3.7) est  $C_{\text{Tr}}^{(1)} Y^{\frac{3}{2}}$  avec

$$C_{\text{Tr}}^{(1)} = \left( \frac{6}{\pi^3 c_E(N)^2} \mathcal{P}(1) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|2N}} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} \right) \times L'(E|\mathbb{Q}, 1) L_E \times \frac{\gamma(4N)}{N^2} \deg(\Phi_{N,E})$$

et est donc proportionnel au degré de la paramétrisation modulaire.

Remarque 3.11. Il est intuitivement étonnant que les traces en moyenne des points de Heegner sur une courbe elliptique  $E$  soient asymptotiquement plus grosses par un facteur logarithmique si le rang de la courbe elliptique est minimal. Donnons une tentative d'explication de ce phénomène. Si  $E$  est de rang 1, alors  $\text{Tr}_d$  appartient à  $E(\mathbb{Q})$  et il existe un entier naturel  $\ell_d$  appelé *multiplicité* de  $\text{Tr}_d$  satisfaisant  $\text{Tr}_d = \ell_d R + T_d$  où  $R$  est un générateur de la partie libre de  $E(\mathbb{Q})$  et  $T_d$  est un élément de  $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ . Ainsi,  $\widehat{h}_{K_d}(\text{Tr}_d) = \ell_d^2 \times 2\widehat{h}_{\mathbb{Q}}(R)$ . L'ensemble des hauteurs des traces est donc inclus dans un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$  ce qui constitue une contrainte forte sur la distribution de la hauteur de ces traces. Notons aussi que le corollaire 3.9 nous informe que la taille moyenne de la multiplicité  $\ell_d$  est  $|d|^{1/4}$ .

Les deux courbes elliptiques de conducteur 91 ont même rang 1 et on a représenté sur la figure 3 les hauteurs des traces  $\text{Tr}_d$  sur ces deux courbes ainsi que la courbe théorique donnée par le corollaire ci-dessus. On constate que les courbes sont beaucoup plus irrégulières que dans le cas du rang 0 (figure 2) même si elles suivent la courbe théorique de très près. La figure 4 illustre les différences de croissance des hauteurs des traces sur les courbes 37A (rang 1) et 37B (rang 0). On remarque que le comportement est très irrégulier. Ceci est en partie dû à la division par  $Y^{3/2}$  qui rend les irrégularités plus apparentes que dans la figure 2. De plus, pour la courbe 37A de rang 1, il arrive fréquemment que la trace soit nulle, ce qui « casse la moyenne ». Il est conjecturé que la proportion d'annulation de  $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$  (ce qui correspond aux cas de trace nulle selon la formule de Gross–Zagier et la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer) tend vers 0 lorsque le discriminant tend vers l'infini<sup>3</sup> mais cela ne se voit pas dans l'échelle de discriminants étudiée.

<sup>3</sup>Le type de symétrie de cette famille de fonctions  $L$  est orthogonal impair.

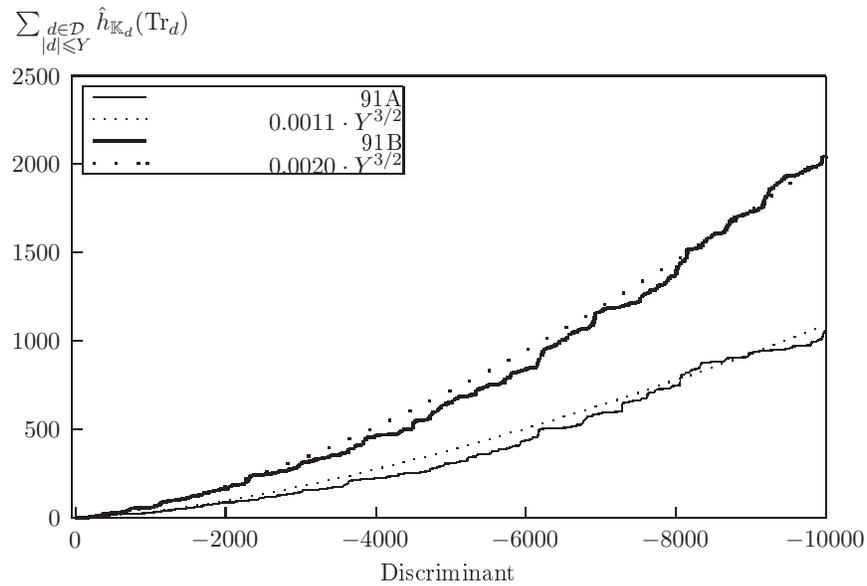


Figure 3: Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 91A et 91B.

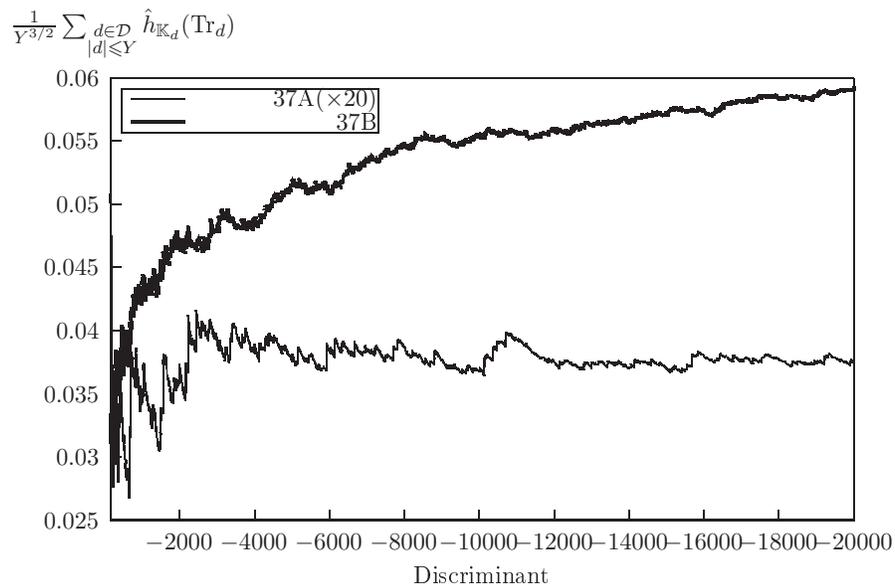


Figure 4: Hauteur des traces en moyenne sur les courbes 37A et 37B.

### 4 Estimation asymptotique de la hauteur des points de Heegner

Nous démontrons une formule asymptotique pour les hauteurs des points de Heegner  $P_d$  semblable à celle que nous avons donnée pour les traces. Soient  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbb{Q}$ , de conducteur  $N$  et  $L(E|\mathbb{Q}, s) := \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$  sa fonction  $L$  (de rang analytique quelconque). On s'intéresse à la valeur moyenne des dérivées en 1 des séries de Dirichlet  $L_d(E, s)$  définies par (2.2).

**Théorème 4.1** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique quelconque et  $F$  est une fonction lisse à support compact dans  $\mathbb{R}_+$  et de moyenne strictement positive, alors*

$$\sum_{d \in \mathcal{D}} L'_d(E, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right) = \widetilde{\alpha}_N Y \log Y + \widetilde{\beta}_N Y + \text{Error} + \mathcal{O}_\varepsilon\left(N^{\frac{15}{4} + \varepsilon} Y^{\frac{19}{20} + \varepsilon}\right),$$

où  $\text{Error} = \mathcal{O}_\varepsilon\left(NY (\log(NY))^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et où

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_N &:= c_N \widetilde{L}(1) \int_0^{+\infty} F(t) dt \neq 0, \\ \widetilde{\beta}_N &:= c_N \int_0^{+\infty} F(t) \left( \widetilde{L}'(1) + \widetilde{L}(1) \left( \log\left(\frac{Nt}{4\pi^2}\right) - 2\gamma \right) \right) dt, \end{aligned}$$

où la constante  $c_N$  est définie en (3.2) avec

$$\begin{aligned} \widetilde{L}(s) &:= \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2s)}{\zeta^{(N)}(2s)} \widetilde{\mathcal{P}}(s) \times \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \widetilde{\mathcal{P}}(s) &:= \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left( 1 + \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} (p^{4s-2} - 1)^{-1} \right). \end{aligned}$$

*Remarque 4.2.* À conducteur  $N$  fixé, il semble que l'on obtienne un développement asymptotique du premier moment par rapport à  $Y$  à un seul terme et non à deux termes comme dans le Théorème 3.1 de H. Iwaniec. Cependant, les résultats numériques décrits dans la dernière partie du paragraphe 5 et notre intuition analytique nous permettent de conjecturer que  $\text{Error} = o(NY)$ . Pour pouvoir prouver cela, il faudrait notamment être en mesure de déterminer le comportement asymptotique de moyennes de la forme

$$\sum_{\substack{1 \leq u \leq U \\ 1 \leq v \leq V}} \sum_{d \in \mathcal{D}} a_{u,v} \chi_d(u) r_d(v) F\left(\frac{|d|}{Y}\right)$$

pour tous nombres réels strictement positifs  $U, V$  et toute suite de nombres complexes

$$(a_{u,v})_{\substack{1 \leq u \leq U \\ 1 \leq v \leq V}}$$

(lire également la discussion autour de l'équation (5.1)). Les auteurs projettent de s'intéresser dans un avenir proche à ce type de moyennes qui sont en réalité un cas particulier de quantités beaucoup plus générales. En outre, il ne fait aucun doute que la dépendance en  $N$  dans  $\mathcal{O}_\varepsilon(N^{\frac{15}{4}+\varepsilon}Y^{\frac{19}{20}+\varepsilon})$  peut être améliorée en étant plus soigneux, mais une croissance au plus polynomiale en le conducteur nous suffit.

**Preuve du théorème 4.1** B. H. Gross et D. Zagier [GrZa, §IV, (0.2)] ont prouvé que la série de Dirichlet  $L_d(E, s)$  définie *a priori* sur  $\Re(s) > \frac{3}{2}$  admet un prolongement holomorphe à  $\mathbb{C}$  et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Lambda_d(E, s) = -\chi_d(N)\Lambda_d(E, 2 - s),$$

où  $\Lambda_d(E, s) := (N|d|)^s((2\pi)^{-s}\Gamma(s))^2L_d(E, s)$  est la série de Dirichlet complétée. Remarquons que comme  $d$  est un carré modulo  $N$ , le signe de l'équation fonctionnelle vaut  $-1$  d'où  $L_d(E, 1) = 0$ . Ceci va nous permettre d'exprimer  $L'_d(E, 1)$  en fonction de deux sommes convergeant exponentiellement vite en suivant une procédure analytique désormais classique (see [IwKo, Théorème 5.3] pour plus de détails). Pour  $X > 0$ , posons

$$V(X) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} \Gamma(s)^2 X^{-s} ds,$$

et

$$\mathcal{A}_d(E, X) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re(s)=3/4} L_d(E, s+1)\Gamma(s)^2 \left(\frac{X}{4\pi^2}\right)^s ds.$$

Le développement de  $L_d(E, s)$  en série de Dirichlet absolument convergente sur  $\Re(s) > \frac{3}{2}$  assure que

$$\mathcal{A}_d(E, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n r_d(n)}{n} \sum_{(m,N)=1} \chi_d(m) \frac{1}{m} V\left(\frac{4\pi^2 nm^2}{X}\right).$$

On déplace la ligne d'intégration jusqu'à  $\Re(s) = -3/4$  croisant un unique pôle en  $s = 0$  de résidu égal à  $L'_d(E, 1)$  puis on revient en  $s = 3/4$  par le changement de variables  $s \mapsto -s$ . L'équation fonctionnelle entraîne alors que

$$L'_d(E, 1) = \mathcal{A}_d(E, X) + \mathcal{A}_d\left(E, \frac{(Nd)^2}{X}\right),$$

et en particulier que

$$L'_d(E, 1) = 2\mathcal{A}_d(E, |d|N).$$

Bornons  $V(X)$  pour  $X > 0$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (4.1) \quad V(X) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} \int_{v=0}^{\infty} e^{-v} \left( \int_{(3/4)} \left(\frac{uv}{X}\right)^s \frac{1}{s} ds \right) dvdu \\ &\ll \int_0^{\infty} \frac{e^{-(u+X/u)}}{u} du \\ &\ll X^{-1/4} \exp(-2\sqrt{X}) \end{aligned}$$

et en fait  $X^j V^{(j)}(X) \ll_j X^{-1/4} \exp(-2\sqrt{X})$  pour tout entier naturel  $j$ . Posons

$$S_N(Y) := \sum_{d \in \mathcal{D}} L'_d(E, 1) F\left(\frac{|d|}{Y}\right).$$

Comme  $d$  est dans  $\mathcal{D}$ ,  $d$  est un carré modulo 4 et est premier à 4 donc  $d$  est congru à 1 modulo 4. Ainsi,  $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z} + \frac{1+\sqrt{d}}{2}\mathbb{Z}$  et un calcul élémentaire montre que

$$r_d(n) = \#\{(u, v) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N}), u^2 + |d|v^2 = 4n\}.$$

On observe que si  $n$  est un carré, alors  $(2\sqrt{n}, 0)$  est une solution de l'équation ci-dessus alors qu'il n'existe pas de solutions de la forme  $(0, *)$  ce qui prouve que

$$\begin{aligned} r_d(n) &= 1 + \#\{v \in \mathbb{Z}^*, |d|v^2 = 4n\} + \#\{(u, v) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*), u^2 + |d|v^2 = 4n\} \\ &:= 1 + r'_d(n) \end{aligned}$$

et que

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ Y \ll |d| \ll Y}} r_d(n) \geq \#\{d \in \mathcal{D}, Y \ll |d| \ll Y\} \sim_{Y \rightarrow +\infty} CY$$

pour une constante absolue  $C > 0$ . Si  $n$  n'est pas un carré alors  $r_d(n) = r'_d(n)$ . Dans chacun des cas, si  $(u, v)$  est une solution contribuant à  $r'_d(n)$  pour un  $d$  inférieur à  $Y$  dans  $\mathcal{D}$ , alors  $u \leq 2\sqrt{n}$  et à chaque tel  $u$  correspondent au plus deux couples  $(d, v)$  (car  $d$  est supposé sans facteurs carrés) d'où

$$(4.2) \quad \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \approx Y}} r'_d(n) \leq 4\sqrt{n}.$$

On écrit alors<sup>4</sup>  $S_N(Y) := TP_1 + Err_1$  où

$$TP_1 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{(m, N)=1} \frac{1}{m} \sum_{d \in \mathcal{D}} \chi_d(m) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right)$$

et

$$Err_1 := 2 \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n r'_d(n)}{n} \sum_{(m, N)=1} \frac{1}{m} \chi_d(m) V\left(\frac{4\pi^2 n m^2}{N|d|}\right) F\left(\frac{|d|}{Y}\right).$$

<sup>4</sup>Au cours de cette preuve,  $TP_i$  désignera la quantité d'où provient la contribution principale et  $Err_i$  un terme d'erreur.

**Estimation du terme d'erreur Err<sub>1</sub>.**

Découpons Err<sub>1</sub> de la façon suivante :

$$(4.3) \quad \text{Err}_1 = 2 \sum_{(m,N)=1} \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \dots + 2 \sum_{(m,N)=1} \sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \dots := \text{Error} + \text{Err}_3$$

pour toute fonction  $\psi$  positive et tendant vers 0 en  $+\infty$ . Les estimations (4.1) et (4.2) assurent que

$$\text{Error} \ll (NY)^{1/4} \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{NY\psi(NY)}} \frac{1}{m^{3/2}} \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{|a_n|}{n^{3/4}} \exp\left(-4\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n}\right).$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz entraîne que le carré de la somme en  $n$  est borné par

$$\left( \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{a_n^2}{n^2} \right) \left( \sum_{1 \leq n \leq \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \sqrt{n} \exp\left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n}\right) \right).$$

La première somme est estimée par  $\mathcal{O}(\log(NY\psi(NY)))$  alors que la deuxième est trivialement inférieure à

$$\int_1^{\frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \sqrt{t} \exp\left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{t}\right) dt \ll \left(\frac{NY\psi(NY)}{m^2}\right)^{3/2}.$$

Ainsi, on a prouvé que  $\text{Error} \ll NY(\psi(NY))^{3/4} (\log(NY\psi(NY)))^{1/2}$ . De la même manière,

$$\text{Err}_3 \ll (NY)^{1/4} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^{3/2}} \left( \sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} \frac{a_n^2}{n^{2+\varepsilon}} \right)^{1/2} \left( \sum_{n > \frac{NY\psi(NY)}{m^2}} n^{1/2+\varepsilon} \exp\left(-8\pi \frac{m}{\sqrt{NY}} \sqrt{n}\right) \right)^{1/2}$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . Une intégration par parties assure que

$$\text{Err}_3 \ll (NY)^{1+\varepsilon} (\psi(NY))^{1/2+\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\psi(NY)}\right)$$

et on choisit alors  $\psi(x) := (\log x)^a$  avec  $2\varepsilon < a < \frac{2}{3}$  de sorte que  $\text{Err}_3 = o(\text{Error})$  et que  $\text{Error} \ll (NY)(\log(NY))^{\frac{3a}{4} + \frac{1}{2}} = o((NY) \log(NY))$ .

**Contribution du terme principal TP<sub>1</sub>**

Déterminons le comportement asymptotique de TP<sub>1</sub> en appliquant une méthode développée dans [Iw]:

- la condition  $d$  sans facteurs carrés est supprimée en introduisant  $\sum_{a^2|d} \mu(a)$  puis la somme est coupée selon la taille des diviseurs  $a$  de  $d$  ( $a \leq A$  et  $a > A$ ) sachant que l'on revient à des discriminants sans facteurs carrés dans le cas des grands diviseurs ;
- pour tout entier  $m = m_1 m_2^2$  avec  $(m_1 m_2, N) = 1$  et  $m_1$  sans facteurs carrés, remarquons que  $\chi_d(m) = \chi_d(m_1)$  si  $(m_2, d) = 1$  (et 0 sinon) puis que le développement de Fourier du caractère  $d \mapsto \chi_d(m_1)$  en terme de caractères additifs de module  $m_1$  s'écrit

$$\chi_d(m_1) = \frac{\overline{\varepsilon_{m_1}}}{\sqrt{m_1}} \sum_{0 \leq |r| < \frac{m_1}{2}} \chi_{Nr}(m_1) e\left(\frac{\overline{N}rd}{m_1}\right),$$

où  $\overline{N}$  est l'inverse de  $N$  modulo  $m_1$  et  $\varepsilon_{m_1}$  est le signe de la somme de Gauss de  $d \mapsto \chi_d(m_1)$ .

La contribution principale provient alors du terme  $r = 0$  pour lequel  $\chi_0(m_1)$  vaut 0 si  $m_1 > 1$  et 1 sinon. En résumé,

$$TP_1 = TP_2 + Err_4 + Err_5,$$

où

$$TP_2 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \mu(a) \sum_{\substack{(m_2, aN)=1 \\ m_2^2 | d}} \frac{1}{m_2^2} \sum_{q|m_2} \mu(q) \\ \times \sum_{\substack{qd \in \mathcal{D}' \\ (d, m_2)=1}} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{Na^2 |d|q}\right) \times F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right),$$

$$Err_5 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{(b, 4N)=1} \sum_{\substack{a|b \\ a > A}} \mu(a) \sum_{(m, N)=1} \frac{1}{m} \sum_{d \in \mathcal{D}} \chi_{b^2 d}(m) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{Nb^2 |d|}\right) F\left(\frac{b^2 |d|}{Y}\right)$$

et

$$Err_4 := 2 \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \mu(a) \sum_{\substack{m = m_1 m_2^2 \\ (m, aN)=1}} \frac{\mu^2(m_1)}{m} \sum_{q|m_2} \mu(q) \sum_{\substack{qd \in \mathcal{D}' \\ (d, m_2)=1}} \frac{\overline{\varepsilon_{m_1}}}{\sqrt{m_1}} \\ \times \sum_{1 \leq |r| < \frac{m_1}{2}} \chi_{Nr q}(m_1) e\left(\frac{\overline{N}rd}{m_1}\right) V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^2}{Na^2 |d|q}\right) F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right)$$

avec  $\mathcal{D}' := \{d \in \mathbb{Z}_-^*, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\}$ .

**Estimation du terme d'erreur Err<sub>5</sub>**

Pour commencer, l'inégalité de Hölder implique que

$$\text{Err}_5 \ll \sum_{n \ll (NY)^{\frac{1}{2}}} \frac{|a_{n^2}|}{n^2} \sum_{\substack{b \geq 1 \\ a|b \\ a > A}} \left( \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}' \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} 1 \right)^{\frac{3}{4}} \left( \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}' \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} \chi_{b^2 d}(m) \right) \left| \sum_{m \ll \left(\frac{NY}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m} \right|^4 \Big)^{\frac{1}{4}},$$

d'où trivialement

$$\text{Err}_5 \ll Y^{\frac{3}{4}} \sum_{n \ll (NY)^{\frac{1}{2}}} \frac{|a_{n^2}|}{n^2} \sum_{\substack{b \geq 1 \\ a|b \\ a > A}} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \left( \sum_{\substack{d \in \mathcal{D}' \\ |d| \ll \frac{Y}{b^2}}} \chi_{b^2 d}(m) \right) \left| \sum_{m \ll \left(\frac{NY}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{m} \right|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

L'inégalité du grand crible [Bo] pour les caractères réels assure alors que

$$\text{Err}_5 \ll_{\varepsilon} \frac{Y^{\frac{5}{4}+\varepsilon}}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{N^{\frac{1}{4}+\varepsilon} Y^{1+\varepsilon}}{A^{\frac{1}{2}}}$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Estimation du terme d'erreur Err<sub>4</sub>**

Posons  $\Delta := \inf\left(\frac{1}{2}, \frac{a^2 q}{Y^{r-\varepsilon}}\right)$  pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$  et découpons Err<sub>4</sub> selon que la sommation en  $r$  est restreinte par

$$1 \leq |r| < \Delta m_1 \rightsquigarrow \text{Err}_6,$$

$$\Delta m_1 \leq |r| < \frac{m_1}{2} \rightsquigarrow \text{Err}_7.$$

On estime Err<sub>7</sub> en bornant la somme sur les discriminants grâce à [Iw, lemme 2, p. 372], puis trivialement la somme en  $n$  et  $m$  ce qui entraîne que

$$\text{Err}_7 \ll_{\varepsilon} \gamma(4N) Y^{\varepsilon} N^{\frac{5}{4}+\varepsilon} \frac{\inf(A, Y^{\frac{1-\varepsilon}{2}})}{Y^{\varepsilon-\frac{1}{4}}} + \gamma(4N) Y^{\varepsilon} N^{\frac{5}{4}+\varepsilon} \frac{A^3}{Y^{\frac{3}{4}}},$$

où  $\gamma(4N)$  est le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{D}'$  modulo  $4N$ . On estime Err<sub>6</sub> de façon triviale par

$$\text{Err}_6 \ll_{\varepsilon} N^{\frac{3}{8}+\varepsilon} Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} A^{\frac{3}{2}}.$$

**Contribution du terme principal TP<sub>2</sub>**

Intéressons-nous au terme principal TP<sub>2</sub> et plus précisément à la somme sur les discriminants intervenant dans cette somme. Pour cela, on note  $\mathcal{D}'(4N)$  l'ensemble des

classes d'équivalence de  $\mathcal{D}'$  modulo  $4N$  et on se souvient que  $\#\mathcal{D}'(4N) = \gamma(4N)$ . La formule de Poisson assure que

$$\sum_{qd \in \mathcal{D}'} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{Na^2 |d|q}\right) F\left(\frac{a^2 |d|q}{Y}\right) = \frac{Y}{4Na^2 q} \sum_{[d_0] \in \mathcal{D}'(4N)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{NY \left|\frac{a^2 q d_0}{Y} + t\right|}\right) F\left(\left|\frac{a^2 q d_0}{Y} + t\right|\right) e\left(\frac{Y\ell}{4Na^2 q} t\right) dt.$$

On isole alors le terme  $\ell = 0$  et on effectue deux intégrations par parties pour chaque terme  $\ell \neq 0$  afin de rendre absolument convergente la série en  $\ell$  (il ne reste pas de termes entre crochets car  $F$  est à support compact). On obtient alors

$$\begin{aligned} \text{TP}_2 &= \frac{\gamma(4N)Y}{2N} \\ &\int_0^{+\infty} F(t) \left( \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n^2}}{n^2} \sum_{\substack{a \leq A \\ (a, 4N)=1}} \frac{\mu(a)}{a^2} \sum_{(m_2, aN)=1} \frac{1}{m_2^2} \sum_{q|m_2} \frac{\mu(q)}{q} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m_2^4}{NYt}\right) \right) dt \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{N^{\frac{5}{4}} \gamma(4N) A^3}{Y^{\frac{3}{4}}}\right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{TP}_2 = c_N Y \int_0^{+\infty} F(t) \mathcal{B}(NYt) dt + \mathcal{O}\left(\frac{N^{\frac{5}{4}} \gamma(4N) Y^{\frac{5}{4}}}{A} + \frac{N^{\frac{5}{4}} \gamma(4N) A^3}{Y^{\frac{3}{4}}}\right)$$

avec

$$\mathcal{B}(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n^2}}{n^2} \sum_{(m, N)=1} \frac{b_{m^2}}{m^2} V\left(\frac{4\pi^2 n^2 m^4}{X}\right)$$

et

$$b_m = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|m \\ p \neq 2}} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

En revenant à la définition intégrale de la fonction  $V$ , on remarque que

$$\mathcal{B}(X) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(3/4)} \Gamma(s)^2 X^{-s} \tilde{L}(s+1) ds$$

et que le produit Eulerien intervenant dans la fonction  $\tilde{L}$  est absolument convergent sur  $\Re(s) > \frac{3}{4}$  et y définit une fonction holomorphe. En décalant le contour jusqu'à  $(-\frac{1}{4} + \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , on ne croise qu'un pôle en  $s = 0$  ce qui prouve que

$$\mathcal{B}(X) = -2(\gamma + \log(2\pi))\tilde{L}(1) + \tilde{L}'(1) + \tilde{L}(1) \log(X) + \mathcal{O}_\varepsilon\left(\left(\frac{N}{X}\right)^{\frac{1}{4} + \varepsilon}\right).$$

**Bilan et choix des paramètres**

On a prouvé que

$$S_N(Y) = \widetilde{\alpha}_N Y \log Y + \widetilde{\beta}_N Y + \mathcal{O}_\varepsilon(NY(\log(NY))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) + \text{Err},$$

où

$$\text{Err} \ll_\varepsilon (NY)^\varepsilon \left( \frac{Y^{\frac{5}{4}}}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{N^{\frac{1}{4}} Y}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{N^{\frac{9}{4}} \inf(A, Y^{\frac{1-\varepsilon}{2}})}{Y^{\varepsilon-\frac{1}{4}}} + \frac{N^{\frac{9}{4}} A^3}{Y^{\frac{3}{4}}} + N^{\frac{3}{8}} Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} A^{\frac{3}{2}} + \frac{N^{\frac{5}{4}} Y^{\frac{5}{4}}}{A} \right),$$

et on choisit alors  $A := N^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{3}{10} - \frac{2\varepsilon}{5}}$  ce qui achève la preuve. ■

Appliquons finalement la formule de Gross–Zagier (2.3) pour obtenir une estimation asymptotique de la hauteur en moyenne des points de Heegner de la même forme que celle que l’on avait obtenue pour les traces.

**Corollaire 4.3** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique quelconque, alors*

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\text{Hd}}(P_d) = C_P Y^{\frac{3}{2}} \log Y + C'_P Y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} + \mathcal{O}_\varepsilon(N^{\frac{15}{4}+\varepsilon} Y^{\frac{29}{20}+\varepsilon}),$$

où

$$\frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} = \mathcal{O}_\varepsilon(NY^{\frac{3}{2}}(\log(NY))^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  et où  $C_P$  est la constante définie par

$$C_P := \frac{2}{\pi} c_N \Omega(N) \frac{L(\text{Sym}^2 E, 2)}{\pi \Omega_{E,N}} \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$

avec

$$\Omega(N) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid 2N}} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} (p^2 - 1)^{-1}\right) \times \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } N \text{ est impair,} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$C'_P := C_P \left( \log\left(\frac{N}{4\pi^2}\right) - \frac{2}{3} - 2\gamma \right) + \frac{c_N}{3\Omega_{E,N}} \widetilde{L}'(1).$$

*Remarque 4.4.* En accord avec la remarque 4.2, on peut conjecturer que

$$\frac{1}{3\Omega_{E,N}} \sqrt{Y} \text{Error} = o_\varepsilon(NY^{\frac{3}{2}})$$

et le corollaire précédent semble alors nous munir d’un développement asymptotique à deux termes de la hauteur en moyenne des points de Heegner.

Remarque 4.5. En remplaçant  $c_N$  et  $L(\text{Sym}^2 E, 2)$  par leur expression, on peut réécrire

$$C_P = \left( \left( \frac{8}{\pi^3 c_E(N)^2} \right) \Omega(N) \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p|N}} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-2} \right) \frac{\gamma(4N)}{N^2} \deg(\phi_{N,E}).$$

Ainsi, contrairement à la constante  $C_{Tr}$  intervenant lorsque l'on considère les traces, à conducteur fixé  $C_P$  ne dépend que du degré de la paramétrisation modulaire, puisque le produit  $\Omega(N)$  ne dépend que de  $N$ . Par contre, lorsque l'on varie le conducteur, il n'y a plus une dépendance directe sur le degré. Il est clair que  $\Omega(N) \geq 1$ ; d'autre part

$$\Omega(N) < \frac{4}{3} \prod_p \left( 1 + \frac{1}{p^2} \right) < \frac{4}{3} \zeta(2).$$

Le produit Eulerien  $\Omega(N)$  est donc compris entre 1 et 2, et il joue un relativement faible rôle dans l'expression de  $C_P$ . On a ainsi

$$1 \leq \prod_{p|N} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-2} \Omega(N) \leq \frac{4}{3} \zeta(2)^3 < 6.$$

Le terme principal, du moins si l'on s'intéresse à des valeurs asymptotiques du conducteur ou du degré de la paramétrisation modulaire, est donc  $\frac{\gamma(4N)}{N^2} \deg(\phi_{N,E})$ . Comme  $\gamma(4N) \ll N$ , la conjecture du degré (2.1) nous procure une borne supérieure pour la croissance des hauteurs des points  $P_d$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  avec  $Y$ . On sait d'autre part qu'il existe des familles de courbes de  $j$ -invariant borné [De, p. 50] pour lesquelles  $\deg(\Phi_{N,E}) \gg N^{\frac{7}{6}} \log N$  ce qui donne une borne inférieure sur la vitesse de croissance des hauteurs lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  avec  $Y$ .

Remarque 4.6. Remarquons finalement que, même à conducteur fixé, la constante  $C'_P$  dépend de la courbe elliptique  $E$  et pas seulement du degré de la paramétrisation modulaire de  $E$ . Par contre, il ne semble pas être possible d'obtenir une estimation satisfaisante de la taille de  $C'_P$  par rapport au niveau.

## 5 Analyse des résultats théoriques et numériques

Après avoir donné quelques valeurs numériques des constantes en jeu, nous donnons des résultats expérimentaux illustrant les formules théoriques.

### 5.1 Quelques valeurs numériques

#### 5.1.1 Valeurs numériques de $C_{Tr}$ et de $C_P$

Le tableau 1 regroupe les valeurs des trois constantes  $C_{Tr}^{(0)}$ ,  $C_{Tr}^{(1)}$ , et  $C_P$ , régissant le comportement en moyenne des hauteurs des points de Heegner et de leurs traces (selon les corollaires 3.6, 3.9, et 4.3) pour toutes les courbes elliptiques de conducteur sans facteurs carrés et inférieur à 100. Les valeurs de  $C_{Tr}$  et de  $C_P$  ont été multipliées par  $10^3$  pour une meilleure lisibilité. Le rapport entre la constante gouvernant le

Courbe	Rang	$C_{Tr} \times 10^3$	$C_P \times 10^3$	$C_P/C_{Tr}$	Courbe	Rang	$C_{Tr}$	$C_P$	$C_P/C_{Tr}$
11 – 1	0	3.33	17.0	5.11	58 – 1	1	1.14	6.80	5.91
14 – 1	0	1.07	6.39	5.92	58 – 2	0	9.47	6.80	0.718
15 – 1	0	0.904	4.40	4.87	61 – 1	1	1.97	6.58	3.33
17 – 1	0	3.21	11.3	3.52	62 – 1	0	4.85	3.18	0.657
19 – 1	0	3.10	10.2	3.29	65 – 1	1	0.593	2.44	4.12
21 – 1	0	1.21	3.28	2.71	66 – 1	0	1.01	2.18	2.15
26 – 1	0	1.80	7.29	4.03	66 – 2	0	2.01	2.18	1.08
26 – 2	0	5.00	7.29	1.45	66 – 3	0	25.2	10.9	0.433
30 – 1	0	0.621	2.20	3.54	67 – 1	0	12.4	15.0	1.20
33 – 1	0	2.48	6.56	2.64	69 – 1	0	2.40	2.18	0.909
34 – 1	0	5.11	5.67	1.10	70 – 1	0	2.49	2.14	0.861
35 – 1	0	1.95	4.29	2.19	73 – 1	0	6.90	8.27	1.19
37 – 1	1	1.86	10.7	5.75	77 – 1	1	1.24	4.26	3.42
37 – 2	0	5.64	10.7	1.90	77 – 2	0	15.4	21.3	1.37
38 – 1	0	4.70	15.3	3.25	77 – 3	0	5.20	6.39	1.23
38 – 2	0	5.09	5.10	1.00	78 – 1	0	4.47	18.7	4.18
39 – 1	0	1.54	3.75	2.43	79 – 1	1	1.97	5.10	2.58
42 – 1	0	2.30	3.28	1.42	82 – 1	1	1.15	4.85	4.19
43 – 1	1	1.90	9.27	4.87	83 – 1	1	1.93	4.85	2.51
46 – 1	0	3.16	10.6	3.36	85 – 1	0	3.00	3.80	1.26
51 – 1	0	2.12	2.91	1.37	89 – 1	1	1.90	4.53	2.37
53 – 1	1	1.87	7.55	4.02	89 – 2	0	10.5	11.3	1.07
55 – 1	0	2.33	2.85	1.22	91 – 1	1	1.09	3.65	3.34
57 – 1	1	0.923	5.24	5.68	91 – 2	1	2.03	3.65	1.79
57 – 2	0	3.83	3.93	1.02	94 – 1	0	4.11	2.12	0.516
57 – 3	0	8.24	15.7	1.90					

Table 1: Valeurs numériques des constantes  $C_{Tr}^{(0)}$ ,  $C_{Tr}^{(1)}$  et  $C_P$ .

comportement des hauteurs des points et celle donnant celui des traces donné dans la dernière colonne n'a que peu de sens dans le cas d'une courbe elliptique de rang 1 car les points  $y$  sont asymptotiquement « plus gros » que les traces d'un facteur  $\log Y$  selon les corollaires 3.9 et 4.3. Il est intéressant de voir que cette constante prend à la fois des valeurs plus grandes « les points sont plus gros » et plus petites « les traces sont plus grosses » que 1.

*Remarque 5.1.* Si l'on poursuit le calcul sur les 200 premières courbes elliptiques de conducteur sans facteurs carrés, alors on obtient un rapport moyen de 1.5 environ et ce rapport tend à décroître. Il n'y a donc pas de raison *a priori* de croire qu'il soit plus souvent plus grand ou petit que 1.

5.1.2 Étude plus fine du rapport  $C_P/C_{Tr}^{(0)}$

Pour étudier le rapport

$$\frac{C_P}{C_{Tr}^{(0)}} = \frac{O(N)}{\mathcal{P}(1)} L(E, 1)^{-1} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{a_p}{p}\right) \left(1 - \frac{a_{p^2}}{p^2}\right)^{-1},$$

on néglige le rôle de  $\frac{O(N)}{\mathcal{P}(1)}$ , qui est de toute façon borné. Ainsi, la taille de

$$\gamma_E = L(E, 1)^{-1} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{a_p}{p}\right)^{-1}$$

par rapport à 1 reflète essentiellement le signe du terme  $\sum_{\sigma \in G_d \setminus \{Id\}} \langle P, P^\sigma \rangle_{\mathbb{H}_d}$ . Plus  $\gamma_E$  sera petit, plus ce produit scalaire sera grand, et, de manière imagée, on pourrait dire que les points de Heegner sont essentiellement resserrés autour d’une même direction ; alors que si  $\gamma_E$  est grand devant 1, cette somme est négative et les points sont éclatés dans l’espace à  $h_d$  dimensions. On s’attend donc, par exemple, à ce que la hauteur des traces (en moyenne) soit supérieure à celle des points sur la courbe 58B ( $\gamma_E = 0.67$ ), ce qui est illustré par la figure 5. Par contre, dans le cas de la courbe 37B ( $\gamma_E = 1.34$ ), les points sont plus gros (figure 6).

Somme des hauteurs

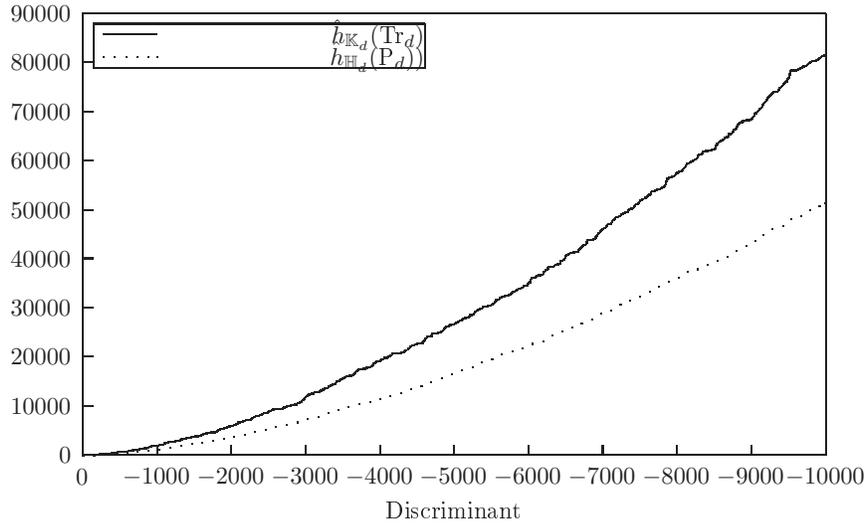


Figure 5: Somme des hauteurs des traces et des points sur la courbe 58B.

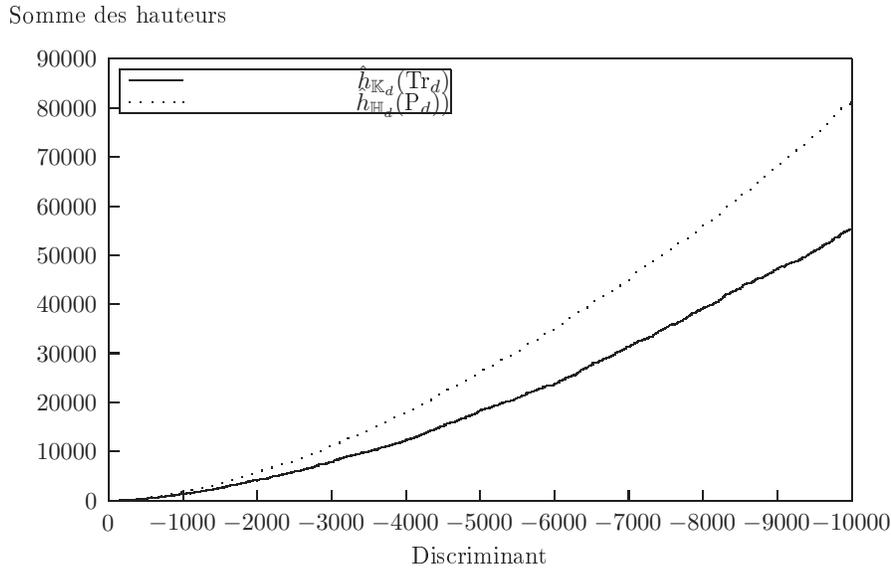


Figure 6: Somme des hauteurs des traces et des points sur la courbe 37B.

## 5.2 Résultats expérimentaux

Nous avons effectué de nombreux calculs de points de Heegner et de leurs hauteurs sur différentes courbes, à l'aide des logiciels Magma et Pari. Magma a permis de calculer les points, ou les traces, eux-mêmes (suivant la méthode de calcul exposée dans [DaGr]), alors que Pari s'est avéré plus rapide pour le calcul direct de la série  $L$  intervenant dans la formule de Gross–Zagier. On s'est concentré sur des courbes de petits conducteurs ( $N < 200$ ), car les algorithmes ont une complexité en  $\mathcal{O}(N^2)$ . Nous présentons ici certains des résultats obtenus, pour illustrer notre théorème.

### 5.2.1 Comparaison entre les valeurs expérimentale et théorique de $C_P$

Nous commençons par comparer les valeurs expérimentales de  $C_P$  à la valeur théorique donnée dans la section précédente. Ainsi, pour chaque courbe de conducteur sans facteurs carrés plus petit que 100, on a représenté le rapport entre la valeur expérimentale

$$C_P^{\text{exp}}(Y) := \frac{1}{Y^{3/2} \log Y} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$$

pour quelques valeurs de  $Y$  et la valeur théorique dans le tableau 2. Ainsi, même pour des discriminants assez grands ( $2 \cdot 10^4$ ), la constante expérimentale est souvent de l'ordre de 75% de la constante théorique. On a représenté plusieurs valeurs de  $Y$  pour bien montrer que ce rapport augmente toutefois, mais très lentement.

Courbe	6000	13000	20000	Courbe	6000	13000	20000
11 – 1	0.716	0.738	0.750	58 – 1	0.663	0.687	0.703
14 – 1	0.707	0.736	0.742	58 – 2	0.808	0.818	0.828
15 – 1	0.703	0.723	0.740	61 – 1	0.735	0.752	0.770
17 – 1	0.735	0.753	0.764	62 – 1	0.832	0.835	0.847
19 – 1	0.718	0.737	0.748	65 – 1	0.752	0.756	0.766
21 – 1	0.700	0.731	0.742	66 – 1	0.752	0.773	0.785
26 – 1	0.714	0.730	0.744	66 – 2	0.693	0.719	0.734
26 – 2	0.682	0.702	0.717	66 – 3	0.671	0.699	0.714
30 – 1	0.687	0.703	0.722	67 – 1	0.725	0.753	0.763
33 – 1	0.697	0.725	0.736	69 – 1	0.795	0.797	0.807
34 – 1	0.707	0.724	0.735	70 – 1	0.762	0.774	0.785
35 – 1	0.749	0.764	0.774	73 – 1	0.803	0.822	0.834
37 – 1	0.661	0.689	0.704	77 – 1	0.709	0.738	0.752
37 – 2	0.805	0.820	0.830	77 – 2	0.767	0.791	0.802
38 – 1	0.760	0.775	0.784	77 – 3	0.770	0.795	0.806
38 – 2	0.702	0.722	0.733	78 – 1	0.722	0.722	0.742
39 – 1	0.713	0.720	0.738	79 – 1	0.794	0.823	0.827
42 – 1	0.683	0.722	0.735	82 – 1	0.731	0.754	0.763
43 – 1	0.678	0.699	0.714	83 – 1	0.786	0.799	0.811
46 – 1	0.699	0.720	0.729	85 – 1	0.808	0.820	0.826
51 – 1	0.711	0.719	0.737	89 – 1	0.823	0.838	0.844
53 – 1	0.690	0.716	0.725	89 – 2	0.800	0.817	0.824
55 – 1	0.818	0.821	0.825	91 – 1	0.738	0.748	0.754
57 – 1	0.680	0.695	0.705	91 – 2	0.766	0.772	0.778
57 – 2	0.774	0.780	0.785	94 – 1	0.996	0.980	0.974
57 – 3	0.727	0.738	0.745				

Table 2: Rapport entre valeur expérimentale  $C_p^{\text{exp}}(Y)$  et valeur théorique  $C_p$ .

### 5.2.2 Étude plus fine des courbes 37A et 37B

Nous allons étudier plus en profondeur les courbes 37A et 37B. Ces deux courbes sont intéressantes pour plusieurs raisons : elles ont même degré et même conducteur, donc devraient avoir même  $C_p$ . La courbe 37B est de rang 0 alors que la 37A est la courbe de rang 1 de plus petit conducteur.

La figure 7 représente les sommes des hauteurs des points sur les courbes 37A et 37B comparées à la valeur théorique donnée par le corollaire 4.3. Contrairement à ce que l'on avait pour les hauteurs des traces, ici les courbes ne se superposent pas du tout, ce qui était prévisible étant donné le tableau ci-dessus.

On a en particulier l'impression que la courbe 37A est nettement en-dessous de la 37B sans paraître la rejoindre alors que le corollaire 4.3 affirme que les hauteurs des points sur ces courbes elliptiques devraient être les mêmes en moyenne. Cependant, une analyse plus fine de la différence entre ces deux courbes montre qu'elle

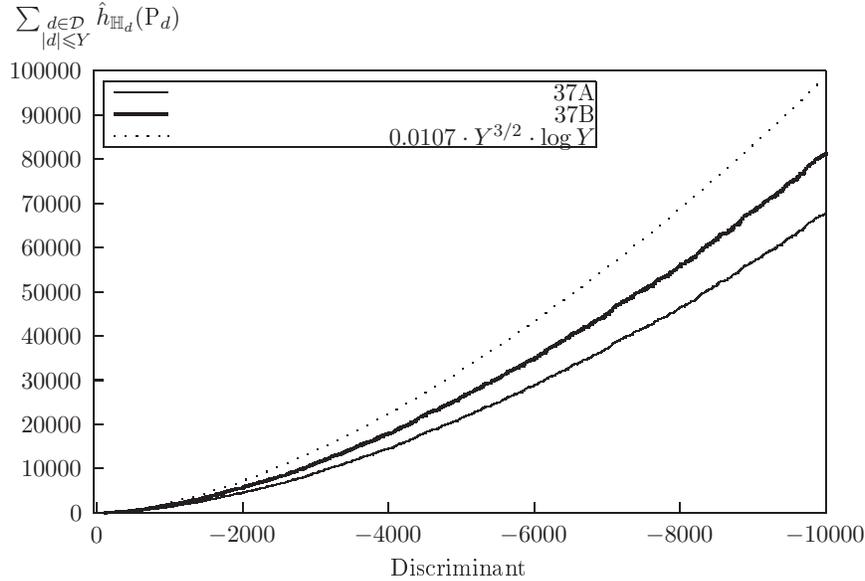


Figure 7: Hauteur des points en moyenne sur les courbes 37A et 37B.

semble être en  $Y^{3/2}$  et donc que les deux courbes semblent se rapprocher à une vitesse de  $1/\log Y$  de la courbe théorique d'équation  $Y \mapsto 0.0107Y^{3/2} \log Y$  ce qu'il est malheureusement difficile d'observer dans l'échelle de discriminants représentée. Autrement dit, on devine numériquement sur les courbes 37A et 37B que

$$\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) = C_P Y^{3/2} \log Y \left( 1 + \mathcal{O}_{N,E} \left( \frac{1}{\log Y} \right) \right).$$

Selon le corollaire 4.3 et la preuve du théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) &= C_P Y^{3/2} \log Y + C'_P Y^{3/2} + \frac{1}{3\Omega_{E,N}} Y^{1/2} \text{Error} + \mathcal{O}_{N,\varepsilon} \left( Y^{\frac{29}{20} + \varepsilon} \right) \\ &= C_P Y^{3/2} \log Y \left( 1 + \frac{C'_P}{C_P} \frac{1}{\log Y} + \frac{1}{3\Omega_{E,N} C_P} \frac{\text{Error}}{Y \log Y} + \mathcal{O}_{N,\varepsilon} \left( Y^{-\frac{1}{20} + \varepsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  et où Error est défini en (4.3). L'analyse numérique suggère donc que le terme  $C'_P Y^{3/2}$  dans le développement du corollaire 4.3 est non nul et même de l'ordre du terme principal pour des petits discriminants. Ceci suggère également que

$$(5.1) \quad \text{Error} = o(NY).$$

Prouver cela nécessite de pouvoir estimer les moyennes mentionnées dans la remarque 4.2. Donnons une autre justification numérique de nos intuitions. Posons

$$\delta(Y) := \frac{1}{Y^{3/2}} \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \left( \widehat{h}_{\mathbb{H}_d, 37B}(P_d) - \widehat{h}_{\mathbb{H}_d, 37A}(P_d) \right).$$

Le tableau 3 donne la valeur de  $\delta(Y)$  pour plusieurs valeurs de  $Y$ . Ainsi,  $\delta(Y)$  décroît

$Y$	$2 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^4$	$10 \cdot 10^4$
$\delta(Y)$	0.01337	0.01329	0.01328	0.01326	0.01324

Table 3: Valeurs numériques de  $\delta(Y)$ .

très légèrement avec  $Y$  et semble se stabiliser. On devine alors que

$$\delta(Y) = D_E + o_{N,E}(1)$$

pour une constante  $D_E$ . Or, le corollaire 4.3 affirme que

$$\delta(Y) = (C'_{P,37B} - C'_{P,37A}) + \frac{1}{3Y} \left( \frac{\text{Error}_{37B}}{\Omega_{37B,37}} - \frac{\text{Error}_{37A}}{\Omega_{37A,37}} \right) + \mathcal{O}_{N,\varepsilon}(Y^{-\frac{1}{20}+\varepsilon})$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  ce qui confirme (5.1). En outre, il ne semble pas y avoir de compensation entre  $C'_P Y^{\frac{3}{2}}$  et  $\frac{1}{3\Omega_{E,N}} Y^{\frac{1}{2}} \text{Error}$  car sinon  $\delta(Y)$  tendrait plus vite vers 0.

## A Un résultat de non-annulation pour les tordues quadratiques paires de courbes elliptiques

**Théorème A.1** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 1, alors*

$$|\{d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \neq 0\}| \gg_{\varepsilon} Y^{1-\varepsilon},$$

lorsque  $Y$  tend vers  $+\infty$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ .

*Remarque A.2.* Ce résultat est l’analogie en rang analytique 1 du résultat de non-annulation quantitatif prouvé par H. Iwaniec [Iw] puis amélioré par A. Perelli et J. Pomykala [PePo] en rang analytique 0. En substance, ce théorème signifie que si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur sans facteurs carrés et de rang analytique 1, alors il existe une infinité de discriminants  $d$  dans  $\mathcal{D}$  pour lesquels la fonction  $L$  de la courbe elliptique  $E$  tordue par le caractère quadratique  $\chi_d$  ne s’annule pas au point critique. Même si la preuve de ce résultat ne présente pas de nouvelles difficultés, nous avons estimé que cet article constitue une bonne opportunité de faire apparaître explicitement ce résultat de non-annulation dans la littérature.

**Preuve du théorème A.1** L'inégalité de Cauchy–Schwarz implique que

$$|\{d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \neq 0\}| \gg \frac{|\sum_{d \in \mathcal{D}} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) F(\frac{|d|}{Y})|^2}{\sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} |L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)|^2} := \frac{M_1(Y)^2}{M_2(Y)}$$

où  $F$  est une fonction lisse à support compact dans  $\mathbb{R}_+$  positive non identiquement nulle. Le comportement asymptotique de  $M_1(Y)$  est donné par le théorème 3.8 donc il s'agit d'obtenir une bonne supérieure pour le second moment  $M_2(Y)$ . L'équation fonctionnelle approchée [IwKo, Théorème 5.3] pour  $L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$  s'écrit

$$L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) = (1 + \omega_d) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \chi_d(n)}{n} V\left(\frac{n}{|d|\sqrt{N}}\right),$$

où  $\omega_d$  est le signe de l'équation fonctionnelle et vaut  $\omega_{\chi_d(-N)} = +1$  et  $V$  est une fonction de troncature qui permet de dire que la somme ci-dessus est de longueur au plus  $Y^{1+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Comme

$$M_2(Y) \ll \sum_{\substack{d \in \mathcal{D} \\ |d| \leq Y}} \left| \sum_{\substack{n \ll_\varepsilon Y^{1+\varepsilon}}} \frac{a_n}{n} \chi_d(n) \right|^2,$$

l'inégalité de grand crible pour les caractères quadratiques primitifs de [He] assure que  $M_2(Y) \ll_\varepsilon Y^{1+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  d'où le résultat. ■

## B Discrétisation de la valeur spéciale des tordues quadratiques impaires de courbes elliptiques

Cette annexe a été motivée par une observation de A. Granville et a été rendue possible par de nombreuses explications de M. Watkins et de C. Delaunay.

### B.1 Conjecture du Samedi Soir selon Conrey, Rubinstein, Snaith et Watkins

L'objectif principal avoué de la prépublication [CRSW] est d'essayer de conjecturer le comportement asymptotique de

$$N(\tilde{\mathcal{D}}, Y) := |\{d \in \tilde{\mathcal{D}}, |d| \leq Y, \omega_d = -1, r_d := \text{ord}_{s=1} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) \geq 3\}|,$$

où  $\tilde{\mathcal{D}}$  est une certaine classe de discriminants et lorsque  $Y$  tend vers  $+\infty$ . Il est important d'avoir en tête que si le signe de l'équation fonctionnelle  $\omega_d$  vaut  $-1$ , alors l'ordre d'annulation au point critique  $r_d$  est forcément un entier naturel impair (donc supérieur à 1). La « famille » de fonctions  $L$  intervenant dans ce problème est  $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}) = \bigcup_{Y>0} \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}, Y)$  où

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{D}}, Y) := \{L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s), d \in \tilde{\mathcal{D}}, |d| \leq Y, \omega_d = -1\}$$

pour tout nombre réel strictement positif  $Y$ . Le type de symétrie de  $\mathcal{F}$  est orthogonal impair ce qui, selon [CKRS], permet de conjecturer que la fonction de distribution des fonctions  $L$  de cette famille est donnée par

$$(B.1) \quad \text{Probabilité}(L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \leq t) \asymp t^{\frac{3}{2}} \log^{\frac{3}{8}}(t)$$

lorsque  $t$  est très petit. Conjecturer le comportement asymptotique de  $N(\tilde{\mathcal{D}}, Y)$  consiste alors à utiliser cette fonction de distribution conjecturale et discrétiser de façon parfois conditionnelle la valeur  $L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1)$ . Dans [CRSW], les auteurs décrivent la conjecture<sup>5</sup> CSS( $\theta$ ) où  $\theta$  est un nombre réel strictement positif.

**Conjecture du Samedi Soir (CSS( $\theta$ ))** Il existe un sous-ensemble «exceptionnel»  $\mathcal{D}_{ex}$  de  $\tilde{\mathcal{D}}$  tel que si  $d$  est un discriminant de  $\tilde{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_{ex}$  satisfaisant  $r_d = 1$ , alors

$$L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \gg \frac{1}{|d|^\theta}$$

et  $|\{d \in \mathcal{D}_{ex}, |d| \leq Y, r_d = 1\}| = o(Y)$  lorsque  $Y \rightarrow +\infty$ .

Ainsi, CSS( $\theta$ ) signifie qu'il existe un réel  $\theta > 0$  tel que  $L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \gg |d|^{-\theta}$  statistiquement<sup>6</sup>. On dit que  $\theta > 0$  est *admissible* si la conjecture CSS( $\theta$ ) est vraie. Le fait que  $\theta$  soit admissible implique conjecturalement en tenant compte de (B.1) que

$$N(\tilde{\mathcal{D}}, Y) \asymp Y^{1-\frac{3\theta}{2}} \log^C(Y)$$

pour une constante absolue  $C$  et lorsque  $Y$  tend vers  $+\infty$ . Les auteurs présentent dans [CRSW] plusieurs modèles aboutissant à des valeurs admissibles différentes pour  $\theta$  et leurs données numériques ne leur permettent pas de se décider. Plusieurs personnes essaient de créer des données numériques plus conséquentes qui pourraient permettre de se décider. Toutefois, il est possible de justifier cette Conjecture du Samedi Soir via la conjecture de B. J. Birch et de H. P. F. Swinnerton-Dyer [BiSw]. Si  $d$  est un discriminant de  $\tilde{\mathcal{D}}$  satisfaisant  $r_d = 1$ , alors

$$L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) = \frac{\Omega(E_d)}{|E_d(\mathbb{Q})_{\text{tors}}|^2} \text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|,$$

où  $E_d$  est la tordue de la courbe elliptique  $E$  par  $\chi_d$ ,  $\Omega(E_d)$  est la période réelle de  $E_d$ ,  $\text{Tam}(E_d)$  est le produit des nombres de Tamagawa de  $E_d$ ,  $E_d(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$  est le sous-groupe de torsion,  $R(E_d)$  est le régulateur de  $E_d$  et  $\text{Sha}(E_d)$  est le groupe de Tate–Shafarevich de  $E_d$ . Par [De2, proposition 2.2, p. 246] nous pouvons écrire que

$$L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \asymp \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2}}} \text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|.$$

<sup>5</sup>“Saturday Night Conjecture”.

<sup>6</sup>Le terme *statistiquement* sera employé plusieurs fois et aura le même sens que celui donné dans la conjecture CSS( $\theta$ ).

Il s'agit alors d'étudier la taille statistique de  $\text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)|$  éventuellement en se limitant à un sous-ensemble de discriminants pour lesquels  $\text{Tam}(E_d)$  reste constant ce qui nécessite d'ajuster la fonction de distribution conjecturale des fonctions  $L$  donnée en (B.1). Comme  $\text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \geq \log(|d|)$ ,  $\frac{1}{2} - \varepsilon$  est admissible pour tout  $\varepsilon > 0$ . Une analogie naturelle avec la formule du nombre de classe de Dirichlet nous amène à conjecturer que

$$\text{Tam}(E_d)R(E_d) |\text{Sha}(E_d)| \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

statistiquement pour tout  $\varepsilon > 0$  et donc tout  $\varepsilon > 0$  semble être admissible.

**B.2 Contribution personnelle dans un cas particulier de la Conjecture du Samedi Soir**

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette annexe,  $\tilde{\mathcal{D}}$  est notre ensemble de discriminants favoris  $\mathcal{D}$  satisfaisant la « condition de Heegner » et  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 0.

**B.2.1 Description du modèle de B. J. Birch des points de Heegner**

Comme  $\text{Tr}_d = \sum_{\sigma \in G_d} P_d^\sigma$ , on peut imaginer [CRSW, p. 4] que l'on somme  $h_d$  vecteurs unitaires à savoir  $\{\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)^{-\frac{1}{2}} P_d^\sigma, \sigma \in G_d\}$  dans un espace de dimension  $h_d$  ( $\mathbb{H}_d$  est un  $\mathbb{K}_d$ -espace vectoriel de dimension finie  $h_d$ ). Le point résultant est statistiquement de norme au moins  $h_d^{(1/2)-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  ce qui se traduit par  $\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \gg_\varepsilon |d|^{-\varepsilon} \widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d)$  statistiquement pour tout  $\varepsilon > 0$ . Bien sûr, pour que ce modèle ait un sens, l'indépendance linéaire des points de Heegner est sous-entendue (celle-ci a été prouvée dans [RoSi] pour des points de Heegner provenant de discriminants différents). Comme le théorème 4.3 assure que  $\widehat{h}_{\mathbb{H}_d}(P_d) \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}} \log^{1-\varepsilon} |d|$ , statistiquement pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut donc conjecturer que

(B.2) 
$$\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\text{Tr}_d) \gg_\varepsilon |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

statistiquement pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**B.2.2 Reformulation conjecturale de la Conjecture du Samedi Soir**

**Conjectures B.1** *Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et*

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z}_-^*, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\},$$

*alors tout  $\varepsilon > 0$  est admissible. Par conséquent,*

$$N(\mathcal{D}, Y) := \left| \left\{ d \in \mathcal{D}, |d| \leq Y, \omega_d = -1, r_d := \text{ord}_{s=1} L(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, s) \geq 3 \right\} \right| \gg_\varepsilon Y^{1-\varepsilon}$$

*lorsque  $Y$  tend vers  $+\infty$ .*

### Justification de la conjecture B.1

Soit  $d$  dans  $\mathcal{D}$  satisfaisant  $r_d = 1$ . La formule de Gross–Zagier (2.4) assure alors que

$$L'(E|\mathbb{Q} \times \chi_d, 1) \asymp \frac{1}{|d|^{\frac{1}{2}}} \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\mathrm{Tr}_d)$$

et suggère, en tenant compte de (B.2), que tout  $\varepsilon > 0$  est admissible.

### B.2.3 Mise en évidence d'un lien conjectural entre régulateur et groupe de Tate–Shafarevitch

**Conjectures B.2** Si  $E$  est une courbe elliptique rationnelle de conducteur  $N$  sans facteurs carrés et de rang analytique 0 et

$$\mathcal{D} = \{d \in \mathbb{Z}_-^*, \mu^2(d) = 1, d \equiv \nu^2 \pmod{4N}, (\nu, 4N) = 1\},$$

alors il existe un sous-ensemble «exceptionnel»  $\mathcal{D}_{ex}$  de  $\mathcal{D}$  tel que si  $d$  est un discriminant de  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{ex}$  satisfaisant  $r_d = 1$ , alors

$$\mathrm{Tam}(E_d)R(E_d) |\mathrm{Sha}(E_d)| \gg_{\varepsilon} |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

et  $|\{d \in \mathcal{D}_{ex}, |d| \leq Y, r_d = 1\}| = o(Y)$  lorsque  $Y \rightarrow +\infty$ .

### Justification de la conjecture B.2

Soient  $d$  dans  $\mathcal{D}$  satisfaisant  $r_d = 1$  et  $R_d$  un générateur de  $E_d(\mathbb{Q})$ . Il est possible d'associer au point  $\mathrm{Tr}_d$  de  $E(\mathbb{K}_d)$  un point  $\widetilde{\mathrm{Tr}}_d$  de  $E_d(\mathbb{Q})$  vérifiant  $\widehat{h}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathrm{Tr}}_d) \asymp \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\mathrm{Tr}_d)$ . En effet,  $E$  et  $E_d$  sont isomorphes sur  $\mathbb{K}_d$  et il s'agit alors d'envoyer le point  $\mathrm{Tr}_d - \overline{\mathrm{Tr}}_d$  de  $E$  sur  $E_d$  via un tel isomorphisme. Ainsi, il existe un entier relatif  $\ell_d$  appelé *multipllicité* de  $\widetilde{\mathrm{Tr}}_d$  tel que  $\widetilde{\mathrm{Tr}}_d \equiv \ell_d R_d \pmod{(E_d(\mathbb{Q}))_{\mathrm{tors}}}$  de sorte que  $\widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\mathrm{Tr}_d) \asymp \widehat{h}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathrm{Tr}}_d) = \ell_d^2 \widehat{h}_{\mathbb{Q}}(R_d) = \ell_d^2 R(E_d)$ . La conjecture de B. J. Birch et de H. P. F. Swinnerton–Dyer combinée avec la formule de Gross–Zagier assurent alors que  $\mathrm{Tam}(E_d) |\mathrm{Sha}(E_d)| \asymp \ell_d^2$  et que  $\mathrm{Tam}(E_d)R(E_d) |\mathrm{Sha}(E_d)| \asymp \widehat{h}_{\mathbb{K}_d}(\mathrm{Tr}_d) \gg_{\varepsilon} |d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$  statistiquement pour tout  $\varepsilon > 0$  selon (B.2).

**Remerciements** Les auteurs remercient chaleureusement H. Darmon pour leur avoir suggéré cette problématique et pour ses nombreux conseils et encouragements. Ce travail a été réalisé à l'occasion d'un stage d'études à McGill University pour le second auteur et d'un stage post-doctoral à l'Université de Montréal pour le premier auteur. Les excellentes conditions de travail offertes par ces deux institutions ont fortement contribué à la réalisation de cet article. Le premier auteur a largement profité de la générosité et des conseils Mathématiques avisés de A. Granville lors de son stage post-doctoral. Enfin, les auteurs remercient l'arbitre pour sa lecture attentive et ses suggestions éclairées.

## Références

- [AbUl] A. Abbes et E. Ullmo, *À propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires*. *Compositio Math.* **103**(1996), no. 3, 269–286.
- [BiSw] B. J. Birch et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Notes on elliptic curves. I. II*. *J. Reine Angew. Math.* **212**(1963), 7–25; **218**(1965), 79–108.
- [Bo] E. Bombieri, *Le grand crible dans la Théorie Analytique des Nombres*, Astérisque No. 18, Société Mathématique de France, Paris, 1974.
- [CKRS] J. B. Conrey, J. P. Keating, M. O. Rubinstein, et N. C. Snaith, *On the frequency of vanishing of quadratic twists of modular L-functions*. Dans: *Number Theory for the Millennium, I*, A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 301–315.
- [CRSW] J. B. Conrey, M. O. Rubinstein, N. C. Snaith, et M. Watkins, *Discretisation for odd quadratic twists*. <http://www.arXiv.org/math.NT/0509428>.
- [Cr] J. E. Cremona, *Elliptic Curve Data*. disponible à <http://www.warwick.ac.uk/~masgaj/ftp/data/INDEX.html>
- [DaGr] H. Darmon et P. Green, *Elliptic curves and class fields of real quadratic fields: algorithms and evidence*. *Experiment. Math.* **11**(2002), 37–55.
- [De] C. Delaunay, *Formes modulaires et invariants de courbes elliptiques définies sur  $\mathbb{Q}$* . Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2002, <http://igd.univ-lyon1.fr/~delaunay/>.
- [De2] ———, *Moments of the orders of Tate-Shafarevich groups*. *Int. J. Number Theory* **1**(2005), no. 2, 243–264.
- [Ed] B. Edixhoven, *On the Manin constants of modular elliptic curves*. Dans: *Arithmetic Algebraic Geometry*. *Progr. Math.* 89. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 25–39.
- [Gr] B. H. Gross, *Heegner Points on  $X_0(N)$* . Dans: *Modular Forms*. Halsted Press, 1984, pp. 87–105.
- [GrZa] B. H. Gross et D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*. *Invent. Math.* **84**(1986), 225–320.
- [He] D. R. Heath-Brown, *A mean value estimate for real character sums*. *Acta Arith.* **72**(1995), no. 3, 235–275.
- [Iw] H. Iwaniec, *On the order of vanishing of modular L-functions at the critical point*. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux* **2**(1990), no. 2, 365–375.
- [IwKo] H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic number theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications 53. American Mathematical Society, Providence RI, 2004.
- [Ma] J. Manin, *Parabolic points and zeta functions of modular curves*. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **36**(1972), 19–66 (Russian).
- [Mu] M. R. Murty, *Bounds for congruence primes*. Dans: *Automorphic Forms, Automorphic Representations, and Arithmetic*. *Proc. Sympos. Pure Math.* 66, American Mathematical Society, Providence RI, 1999, pp. 177–192.
- [PePo] A. Perelli et J. Pomykala, *Averages of twisted elliptic L-functions*. *Acta Arith.* **80**(1997), no. 2, 149–163.
- [RoSi] M. Rosen et J. H. Silverman, *On the independence of Heegner points associated to distinct quadratic imaginary fields*. *J. Number Theory* **127**(2007), no. 1, 10–36.
- [TaWi] R. Taylor et A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*. *Ann. of Math.* **141**(1995), no. 2, 553–572.
- [Sh] G. Shimura, *On the holomorphy of a certain Dirichlet series*. *Proc. London Math. Soc.* **31**(1975), no. 1, 79–98.
- [Si] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Wa] M. Watkins, *Computing the modular degree of an elliptic curve*. *Experiment. Math.* **11**(2002) no. 4, 487–502.
- [Wa2] ———, *Some remarks on Heegner point computations*. <http://arxiv.org/abs/math.NT/0506325>.
- [Wi] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. *Ann. of Math.* **141**(1995), no. 3, 443–551.

Université de Bordeaux I, Laboratoire A2X, Bâtiment A33, Bureau 301 M, 351 cours de la Liberation, 33405 Talence cedex, France  
courriel: Guillaume.Ricotta@math.u-bordeaux1.fr

École Normale Supérieure, 75005 Paris, France  
courriel: thomas.vidick@ens.fr