

POLYEDRES EQUILIBRES

PAR
ROBERT BANTEGNIE

EN HONNEUR À
H. S. M. COXETER

0. Introduction. Dans une note au C. R. Math. Rep. Ac. Sc. Canada [1] qui peut servir de préliminaire, j'ai annoncé qu'on ne pouvait trouver de polyèdres convexes équilibrés non strictement équilibrés qui, à une isomorphie près, ne soient pas dans la liste de Johnson [4]. Nous donnons ici la preuve.

Rappelons qu'on dit qu'un polyèdre convexe fermé borné est strictement équilibré resp. équilibré quand le cycle resp. le pseudocycle de chaque sommet est le même. Les polyèdres strictement équilibrés sont α) les polyèdres uniformes β) le polyèdre de Miller appelé pseudo-rhombicuboctaèdre dans [9], petit rhombicuboctaèdre tordu dans [6], gyrobitcupola carré allongé dans [4] et attribué à tort à Ashkinuze dans [7].

On trouve dans [4] 6 polyèdres équilibrés non strictement ayant des faces régulières. Avec les dénominations de Johnson, ce sont l'*orthobicupola triangulaire* (n° 27) ayant 6 sommets ($4^2.3^2$) et 6 autres ($4.3.4.3$), l'*orthobicupola pentagonal* (n° 34) ayant 10 sommets ($5^2.3^2$) et 20 autres ($5.3.5.3$) et les 4 *rhombicosidodécaèdres tourné, parabitourné, métabitourné, tritourné* (n° 72, 73, 74, 75) dont le nombre de sommets \circ ($5.4^2.3$) et de sommets \bullet ($5.4.3.4$) est donné par la table

	\circ	\bullet
tourné	10	50
parabitourné	20	40
métabitourné	20	40
tritourné	30	30

Ces 6 polyèdres constituent la liste complète des polyèdres équilibrés non strictement. Il résulte de l'étude de Johnson que ceux-ci peuvent se réaliser avec des faces régulières.

Reçu par les éditeurs le 10 janvier 1980 et, sous forme révisée le 1 avril 1980.

1. Notions générales. Dans $\pi = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ soit un ensemble dénombrable ou fini de points et de côtés formant un graphe connexe simple (c'est-à-dire sans boucles ni côtés multiples). Les faces, les côtés, les sommets de ce graphe constituent un 2-complexe $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}$ dont le 1-squelette est Γ . Dans \mathcal{C} et Γ la notion d'adjacence coïncide avec la notion d'inclusion. On peut aussi considérer \mathcal{C} et Γ comme plongés dans la sphère réelle à 2 dimensions. On suppose toujours Γ 3-connexe: les faces et les sommets de Γ ont alors une valence au moins égale à 3. Quant Γ est fini d'après un théorème de Steinitz ([3], [7], [10]) il existe un polyèdre convexe \mathcal{P} (enveloppe convexe d'un nombre fini de points de \mathbb{R}^3) tel que le 2-complexe associé à un de ses diagrammes de Schlegel est isomorphe (c'est-à-dire combinatoirement équivalent) à $\mathcal{C}(\Gamma)$. Un tel graphe est dit polyédral. Il peut être réalisé comme diagramme de Schlegel donc avec des côtés rectilignes dans π . Si $\infty \notin \Gamma$ on peut trouver $n \geq 3$ et des points distincts g_1, \dots, g_n de Γ tels que pour $\varphi = \text{Conv}\{g_1, \dots, g_n\}$ tout point de Γ est dans φ ; $\pi \setminus \varphi$ est la "face infinie ouverte" de Γ . Si $\infty \in \Gamma$ le diagramme est parfois appelé diagramme de Schlegel dual (cf. [6]). Si le nombre de sommets, de côtés, de faces de \mathcal{C} est noté resp. v, e, p (le nombre de sommets, de faces de valence k étant noté resp. v_k, p_k) on a $2e = \sum_{k \geq 3} kp_k = \sum_{k \geq 3} kv_k$ et $v - e + p = 2$ (1) traduit la relation d'Euler (cf. par ex. [3]). Quand Γ est infini dénombrable, on suppose que Γ est le graphe d'un pavement \mathcal{T} ordinaire de \mathbb{R}^2 localement fini (cf. [2]).

Soit S un sommet de valence r ; S appartient à r faces (numérotées en tournant autour de S) distinctes F_1, \dots, F_r de valences respectives f_1, \dots, f_r .

(f_1, \dots, f_r) pris modulo le renversement et les permutations circulaires est appelé cycle de S , pris modulo toutes les permutations de $\{1, \dots, r\}$ pseudocycle de S .

Si la face F de valence r contient sur sa frontière les sommets distincts (numérotés dans l'ordre induit sur cette frontière) S_1, \dots, S_r de valences respectives s_1, \dots, s_r , (s_1, \dots, s_r) pris modulo toutes les permutations est le pseudocycle de F , pris modulo le renversement et les permutations circulaires le cycle de F .

On emploie la notation multiplicative: par ex. $(4, 3, 4, 3, 3)$ a pour cycle $(4.3.4.3^2)$ et pour pseudocycle $(4^2.3^3)$; on note les éléments d'un pseudocycle en décroissant.

Les contributions (d'Euler-Lebesgue) de S et de F sont

$$c(S) = 1 - (r/2) + \sum_{i=1}^r 1/f_i, \quad c(F) = 1 - (r/2) + \sum_{i=1}^r 1/s_i.$$

Elles sont les mêmes pour 2 sommets (ou faces) ayant même pseudocycle. Soit \mathcal{S}, \mathcal{F} l'ensemble des sommets resp. des faces de \mathcal{C} , pour \mathcal{C} fini, Euler se traduit par

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) = \sum_{F \in \mathcal{F}} c(F) = 2 \quad (2) \text{ ([5], [8]).}$$

A \mathcal{C} on associe le complexe dual de la façon habituelle (cf. par ex. [8] pour \mathcal{C} fini et [2] pour \mathcal{C} dénombrable) et \approx notant l'isomorphie on a

- (a) $\mathcal{C}^{**} \approx \mathcal{C}$
- (b) $\mathcal{C}_1 \approx \mathcal{C}_2$ ssi $\mathcal{C}_1^* \approx \mathcal{C}_2^*$.

On dit que \mathcal{C} est *équilibré* (resp. *strictement équilibré*) sur les faces, resp. les sommets quand le pseudocycle (resp. cycle) d'une face, resp. d'un sommet de \mathcal{C} est toujours le même. On a aussi

(c) \mathcal{C} est *équilibré* (resp. *strictement équilibré*) sur les faces (resp. les sommets) ssi \mathcal{C}^* est *équilibré* (resp. *strictement équilibré*) sur les sommets (resp. sur les faces).

On dit que \mathcal{C} est *faiblement équilibré* sur les faces, resp. les sommets quand la contribution d'une face (resp. d'un sommet) est toujours la même. On note alors cette contribution $c(\mathcal{C})$. Evidemment pour \mathcal{C} strictement équilibré entraîne équilibré et équilibré entraîne faiblement équilibré.

Pour \mathcal{C} fini faiblement équilibré on a $c(\mathcal{C}) > 0$; pour \mathcal{C} dénombrable infini on peut appliquer Euler à l'union connexe d'un nombre fini de faces et pour \mathcal{C} faiblement équilibré on trouve $c(\mathcal{C}) = 0$ (cf. [2]).

2. Graphes polyédraux équilibrés. L'étude des pavements ayant été faite dans [2], on s'attache au cas de \mathcal{C} fini. On considère spécialement le cas des sommets.

Soit un graphe polyédral Γ réalisé comme diagramme de Schlegel. On ne fait pas de distinction entre Γ et le polyèdre dont il est le diagramme. Si Γ est faiblement équilibré sur les sommets on a pour $c = c(\mathcal{C})$

$$c \text{ card } \mathcal{S} = 2 \tag{3}$$

Si un sommet de Γ a pour valence r , $c > 0$ et $c = 1 - (r/2) + \sum_{i=1}^r 1/f_i \leq 1 - (r/2) + (r/3)$ donne $r < 6$. D'une façon plus précise, on a $c > 0$ ssi

$$\sum_{i=1}^r 1/f_i > (r/2) - 1 \tag{4}$$

et le pseudocycle (f'_1, \dots, f'_r) est solution de (4) quand le pseudocycle (f_1, \dots, f_r) est solution de (4) et que pour $i = 1, \dots, r$ on a $f'_i \leq f_i$ (on suppose aussi que pour $i = 1, \dots, r - 1$, $f'_i \geq f'_{i+1}$, $f_i \geq f_{i+1}$). Un pseudocycle solution de (4) non majoré par un pseudocycle solution est dit *maximal* et on a (cf. [8] qui est incomplet):

Les pseudocycles maximaux sont (n étant entier)

longueur 3: $(n.6.3)$, $(41.7.3)$, $(23.8.3)$, $(17.9.3)$, $(14.10.3)$, $(13.11.3)$, $(n.4^2)$,
 $(19.5.4)$, $(11.6.4)$, $(9.7.4)$, (9.5^2) , $(7.6.5)$

longueur 4: $(n.3^3)$, $(11.4.3^2)$, $(7.5.3^2)$, $(5.4^2.3)$

longueur 5: (5.3^4) .

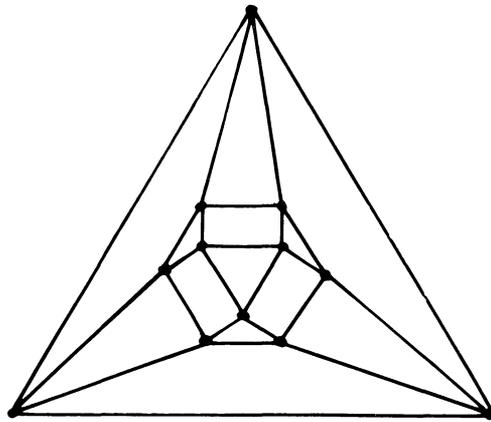
Soit \mathcal{E} l'ensemble des graphes équilibrés, \mathcal{U} l'ensemble des graphes strictement équilibrés, $\mathcal{H} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{U}$. On a le

LEMME. Le pseudocycle d'un sommet d'un polyèdre de \mathcal{H} est un des 3 pseudocycles $(4^2.3^2)$, $(5^2.3^2)$, $(5.4^2.3)$.

Preuve. On montre que si le pseudocycle d'un polyèdre \mathcal{P} de \mathcal{E} n'est pas un des pseudocycles cités, on a $\mathcal{P} \notin \mathcal{H}$. On se sert du résultat sur les pseudocycles maximaux qui donne la liste possible des pseudocycles des éléments de \mathcal{E} . Si la longueur d'un pseudocycle de $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$ est 3 ou 5 on a $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$; si ce pseudocycle est $(n.3^3)$ avec $n \geq 3$ on a encore $\mathcal{P} \in \mathcal{U}$; si ce pseudocycle est $(x.4.3^2)$ avec $4 \leq x \leq 11$, pour $x \neq 4$ on a une impossibilité; si c'est $(x.5.3^2)$ avec $5 \leq x \leq 7$ pour $x \neq 5$ on a encore une impossibilité. Dans la suite on a déterminé tous les éléments de \mathcal{E} (y compris ceux de \mathcal{U}) ayant un des pseudocycles du lemme.

I Pseudocycle $(4^2.3^2)$ (fig. 1):

On a $c = 1/6$ d'où $\text{card } \mathcal{S} = 12$. Les polyèdres cherchés ont 8 faces triangulaires, 6 faces quadrangulaires et 24 côtés. On obtient le cuboctaèdre de \mathcal{U} ayant 12 sommets \bullet de cycle $(4.3.4.3)$ (1.1) et un polyèdre de \mathcal{H} ayant 6 sommets \bullet et 6 sommets \circ de cycle $(4^2.3^2)$ (1.2). (1.2) est le diagramme de l'orthobicupola triangulaire Q_3^2 de Johnson. Notons que dans la représentation de ces diagrammes avec au centre un hexagone régulier, on passe de l'un à l'autre en faisant tourner cet hexagone et son intérieur de 60° .

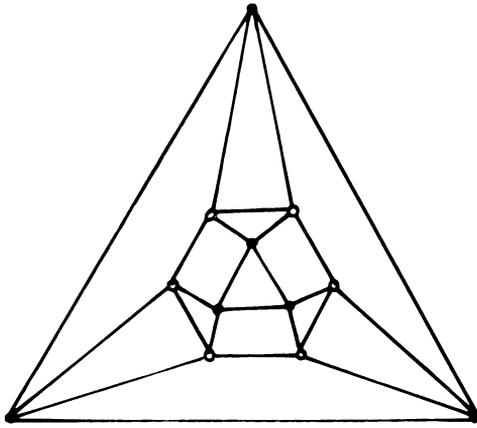


cuboctaèdre (1, 1)

Fig. 1

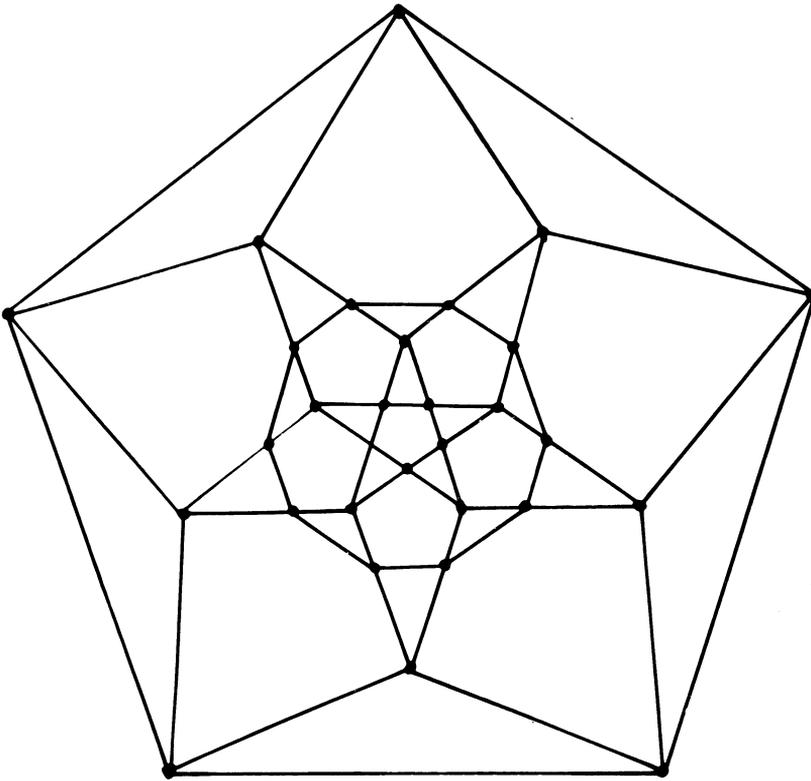
II Pseudocycle $(5^2.3^2)$ (fig. 2):

On a $c = 1/15$ et $\text{card } \mathcal{S} = 30$. Les polyèdres cherchés ont 20 faces triangulaires, 12 faces pentagonales et 60 côtés. On obtient (fig. 2.1.) l'icosidodécaèdre de \mathcal{U} ayant 30 sommets \bullet de cycle $(5.3.5.3)$ et un polyèdre de \mathcal{H} ayant 20 sommets \bullet et 10 sommets \circ de cycle $(5^2.3^2)$ (2.2). (2.2) est le diagramme de l'orthobicupola pentagonal Q_5^2 de Johnson. Notons que dans la



orthobicupola triangulaire (1.2)

Fig. 1 (suite)



icosidodécaèdre (2.1)

Fig. 2

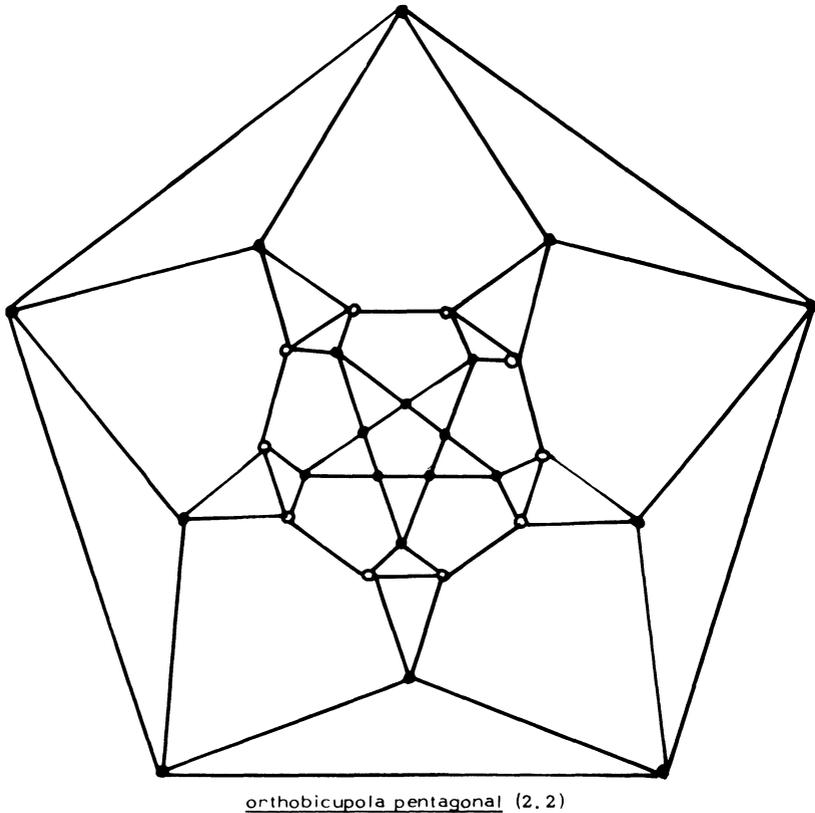


Fig. 2 (suite)

représentation de ces diagrammes avec au centre un décagone régulier on passe de l'un à l'autre en faisant tourner l'intérieur de ce décagone de 36° .

Pour prouver qu'il n'existe pas (dans les cas I et II) d'autres situations que celles indiquées, on vérifie que si dans le graphe on a un sommet \circ alors nécessairement dans le cas I on trouve ce qui est intérieur à l'hexagone dans 1.2. et dans le cas II ce qui est intérieur au décagone dans 2.2. En particulier dans le cas I il existe un triangle dont les sommets sont tous \bullet et dans le cas II un pentagone dont les sommets sont \bullet . Si l'on étudie alors cette situation on est ramené aux 2 cas indiqués 1 et 2 suivant qu'un (et par suite tous) des sommets de l'hexagone (ou décagone) du centre est \bullet ou \circ .

III Pseudocycle (5.4².3) (fig. 3):

On a $c = 1/30$, $\text{card } \mathcal{S} = 60$. Les polyèdres cherchés ont 12 faces pentagonales, 30 faces quadrilatères, 20 faces triangulaires et 120 côtés. On obtient le (petit) rhombicosidodécaèdre $r \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ de \mathcal{U} ayant 60 sommets \bullet de cycle (5.4.3.4) et les 4 possibilités signalées dans l'introduction.

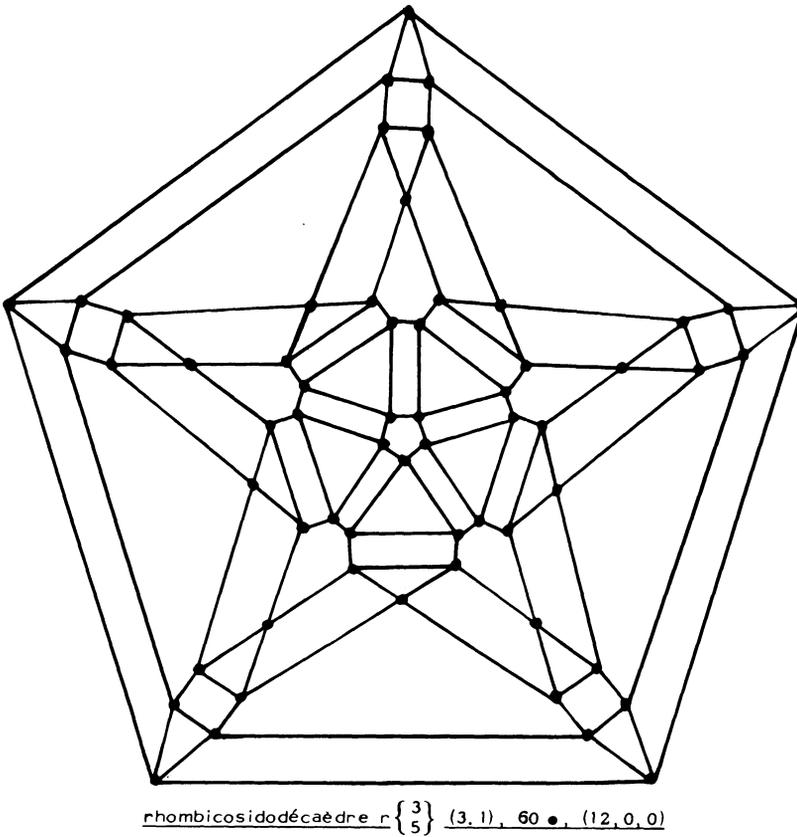


Fig. 3

Pour distinguer entre ces cas, désignons par x, y, z le nombre de faces pentagonales ayant sur leur pourtour resp. 0, 2, 4 sommets \circ (les autres possibilités sont exclues). Il se trouve que le triplet (x, y, z) permet de distinguer les cas possibles.

Considérons le diagramme (3.1) du rhombicosidodécaèdre qui correspond au triplet $(12, 0, 0)$ et un de ses 12 pentagones. Avec ses voisins (quadrilatères et triangles ayant un sommet sur ce pentagone) il forme un décagone. Si l'on fait "tourner" l'intérieur d'un de ces décagones on obtient le rhombicosidodécaèdre tourné (3.2). Si l'on considère 2 décagones disjoints et que l'on fait tourner leurs intérieurs on obtient un rhombicosidodécaèdre bitourné (suivant qu'il existe ou non un quadrilatère joignant ces 2 décagones on obtient les cas distincts 3.4 et 3.3, le métabitourné et le parabitourné de Johnson). Si l'on considère 3 décagones disjoints, on obtient le rhombicosidodécaèdre tritourné.

Cela ne prouve pas qu'on a épuisé tous les cas possibles. Pour ce faire, on peut distinguer $z = 0$ et $z > 0$.

Si $z = 0$ et $y \geq 1$ en dehors du dodécaèdre marqué (t) on obtient

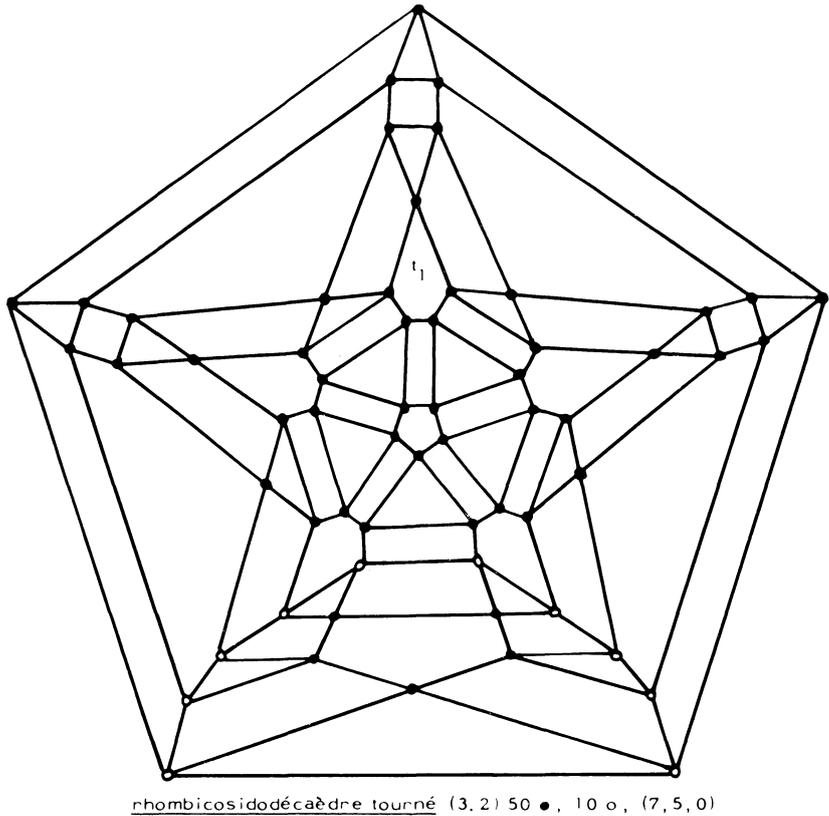
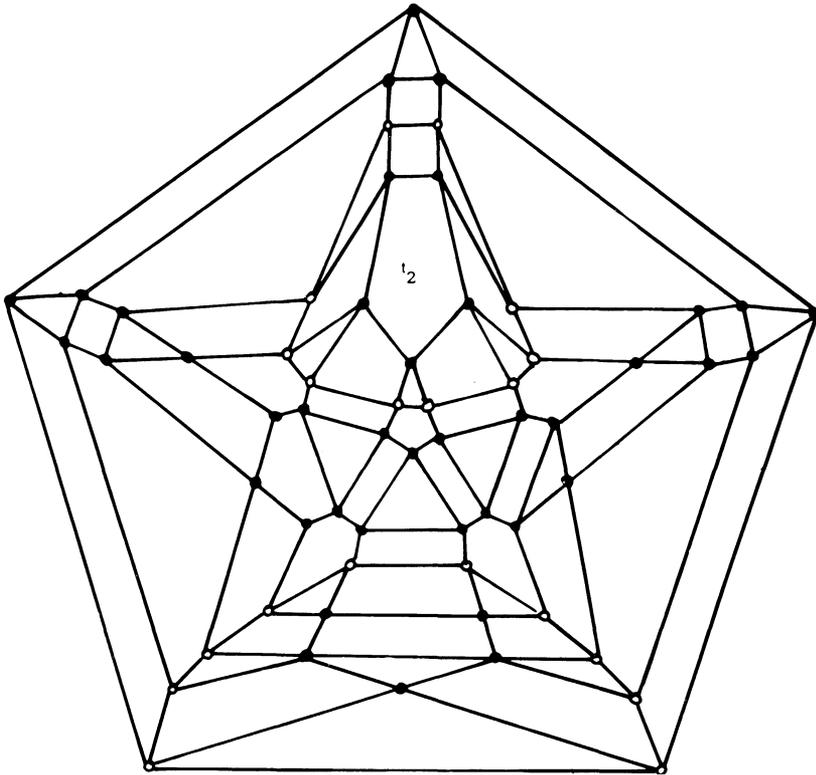


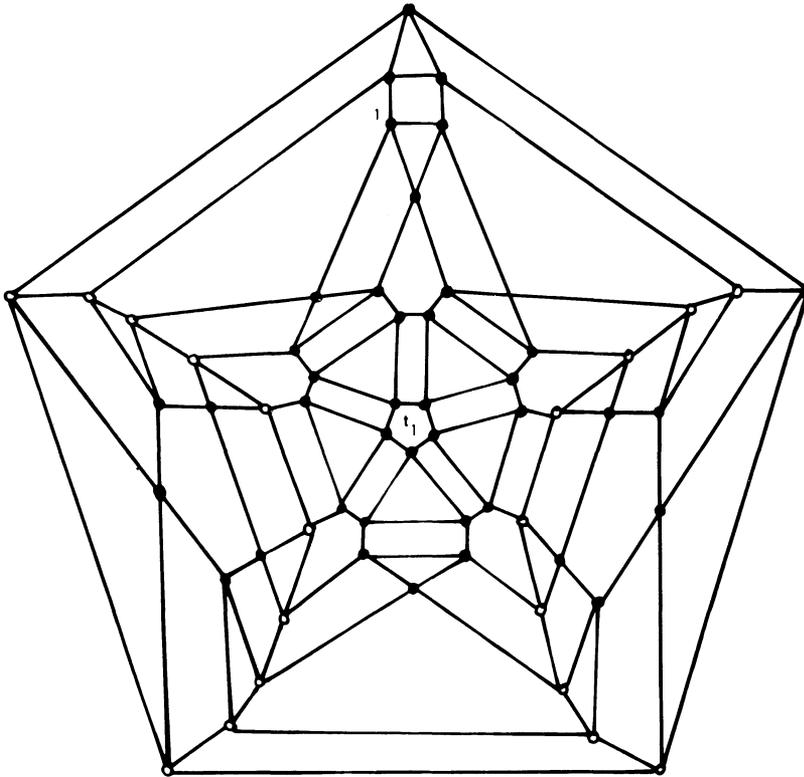
Fig. 3 (suite)

nécessairement ce qui est en 3.2 et 3.3. Si ce qui est intérieur à ce dodécagone est (t_1) on a 3.2 et le rhombicosidodécacèdre tourné $(7, 5, 0)$. Si ce qui est intérieur à ce dodécagone est (t_2) on a 3.3 et le rhombicosidodécacèdre bitourné $(2, 10, 0)$ (le parabitourné). Pour $z > 0$ si l'on suppose que le point marqué 1 dans 3.4 et 3.5 est ● on obtient nécessairement ce qui est en dehors du dodécagone marqué (t) . Si ce qui est dans ce dodécagone est (t_1) on a 3.4 et le rhombicosidodécacèdre bitourné $(4, 6, 2)$ (le métabitourné); si c'est (t_2) on a 3.5 et le rhombicosidodécacèdre tritourné $(3, 3, 6)$ (si l'on suppose que le point marqué 1 est ○ on obtient encore (à une isomorphie près) le rhombicosidodécacèdre tritourné.).

Notons pour finir que la méthode utilisée permet de retrouver les polyèdres strictement équilibrés (cf. [11]). Notons aussi que la dualité permet de déterminer les polyèdres équilibrés non strictement sur les faces. Ils sont au nombre de 6. N.B. Dans 3.3 le décagone du bas est comme dans 3.2 (un trait en trop); dans 3.5 un sommet du décagone central apparaît, à tort, noir.



rhombicosidodécaèdre parabitourné (3, 3), 40 ●, 20 ○, (2, 10, 0)



rhombicosidodécaèdre métabitourné (3, 4), 40 ●, 20 ○, (4, 6, 2)

Fig. 3 (suite)

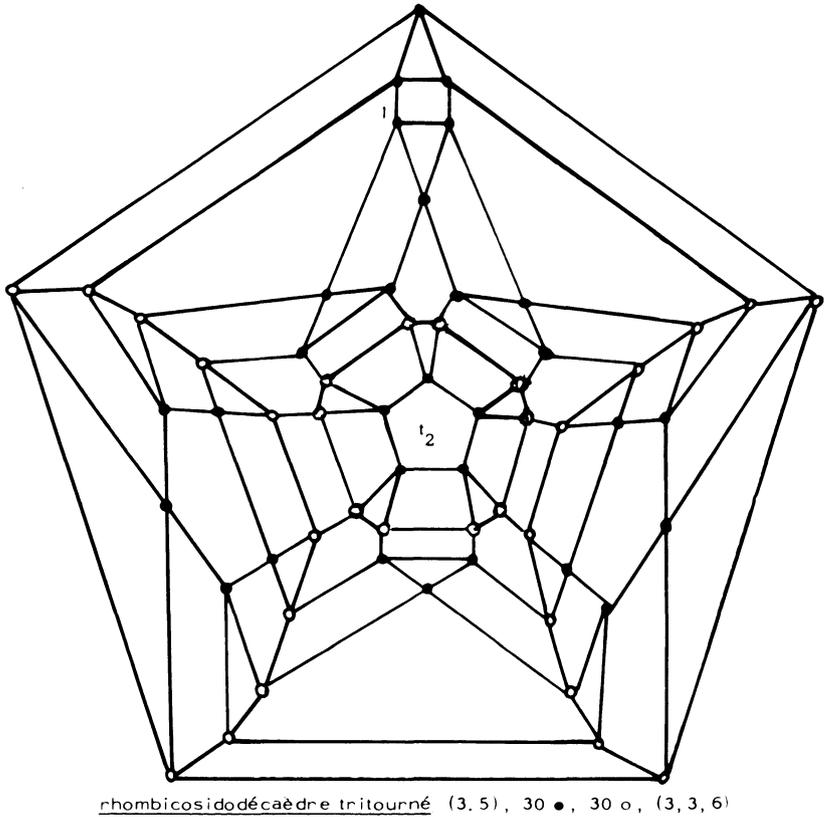


Fig. 3 (suite)

REFERENCES

1. R. Bantegnie, *Variations sur des thèmes de B. Grünbaum et G. C. Shepard*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **1** (1979) 197–198.
2. R. Bantegnie, *Pavements équilibrés*, Pub. Math. Fac. Sc. Besançon (1978–1979).
3. B. Grünbaum, *Convex polytopes*, (John Wiley and Sons, London, New York, Sydney 1967).
4. N. W. Johnson, *Convex polyhedra with regular faces*, Can. J. of Math. **18** (1966) 169–200.
5. H. Lebesgue, *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*. J. de Math. pures et appl. 9 Ser **19** (1940) 27–43.
6. A. L. Loeb, *Space structures, their harmony and counterpoint*, (Addison Wesley Pub. Cy 1976).
7. L. A. Lyusternik, *Convex figures and polyhedra*, (Dover Pub. Inc. New York 1963).
8. O. Ore, *The four color problem*, (Academic Press, New York and London, 1967).
9. W. W. Rouse Ball and H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, (12° éd., University of Toronto Press 1974).
10. E. Steinitz und H. Rademacher, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, (Berlin 1934 (Reprint 1976)).
11. T. R. S. Walsh, *Characterising the vertex neighbourhoods of semi regular polyhedra*, Geometriae Dedicata **1** (1972) 117–123.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ MATHÉMATIQUES
ROUTE DE GRAY 25030 BESANCON CEDEX
FRANCE