

CAPACITÉ D'ENSEMBLES DE CANTOR GÉNÉRALISÉS*

MAKOTO OHTSUKA

1. D'abord nous définissons les ensembles de Cantor généralisés. Soient k_1, k_2, \dots des nombres entiers supérieurs à 1 et soient p_1, p_2, \dots des nombres finis quelconques également supérieurs à 1. On pose $l_q = 1/(k_q p_q)$. Soit I un intervalle de longueur $d > 0$. On enlève de I $(k_q - 1)$ intervalles de même longueur tels qu'il reste k_q intervalles de même longueur $l_q d$. On appelle cette opération la q -opération appliquée à I . On commence par appliquer l'1-opération à $[0, 1]$, on applique la 2-opération à chacun des intervalles I_1 , ($1 \leq v \leq k_1$) qui restent, puis on applique la 3-opération à chacun des intervalles $I_{2\lambda}$ ($1 \leq \lambda \leq k_1 k_2$) qui restent, et ainsi de suite. On appellera l'ensemble limite restant un *ensemble de Cantor généralisé dans E_1* , et le notera $F = F(k_q, p_q)$. Notre définition dans $E_n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, l'espace euclidien à n dimensions ($n \geq 2$), est la suivante: Soit $F_j = F(k_q^{(j)}, p_q^{(j)})$ un ensemble de Cantor généralisé défini sur l'axe de x_j ; nous appellerons l'ensemble produit $F = F_1 \times \dots \times F_n$ un *ensemble de Cantor généralisé dans E_n* ($n \geq 2$). Il sera appelé *symétrique* si $F_1 = \dots = F_n$.

L'auteur [4] a démontré, sous la condition additionnelle $p_q \geq p_0 > 1$ ($q = 1, 2, \dots$), que pour qu'un ensemble de Cantor généralisé $F(k_q, p_q)$ soit d' α -capacité nulle ($0 \leq \alpha < 1$),¹⁾ il faut et il suffit que

$$(1) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{k_1 \cdots k_q} = \infty \quad (\alpha = 0)$$

ou

$$(2) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(p_1 \cdots p_q)^\alpha}{(k_1 \cdots k_q)^{1-\alpha}} = \infty \quad (0 < \alpha < 1).$$

Presque en même temps af Hällström [1 ; 2] s'est aussi occupé de cette question dans le cas $\alpha = 0$, et il a trouvé que (1) est suffisant pour que l'ensem-

Received October 10, 1956.

* Ce travail avait été annoncé dans la note de bas de page 16 de [4], mais depuis ce temps-là certaines améliorations ont été faites.

¹⁾ 0-capacité signifie la capacité logarithmique.

ble soit de capacité logarithmique nulle et inversement que si l'ensemble est de capacité logarithmique nulle, alors ou bien (1) est vrai, ou bien on a

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{\log k_q}{k_1 \cdots k_{q-1}} = \infty ;$$

il n'a pas supposé $p_q \geq p_0 > 1$.

Ces deux résultats sont les meilleurs parmi les résultats qui ont été obtenus pour les ensembles de Cantor généralisés à notre sens. Divers cas particuliers avaient déjà été connus; le critère (2) avait été obtenu par Pólya et Szegő [5] pour $p_1 = p_2 = \dots = 2$ et pour k_q constant, Nevanlinna avait démontré (1) avec $k_1 = k_2 = \dots = 2$ et $p_q \geq p_0 > 1$ (voir [3]), et Salem et Zygmund [7] avaient donné (1) et (2) pour k_q constant et pour $p_q > 1$ quelconque.

Tsuji [8] a aussi défini certains ensembles linéaires de type de Cantor mais, comme af Hällström [2] a remarqué, on peut donner critère pour que les ensembles soient de capacité logarithmique positive en modifiant (1). D'ailleurs il a défini des ensembles plans et des ensembles spatiaux de type de Cantor et il a donné certains critères pour qu'ils soient de capacité logarithmique positive et de capacité newtonienne positive respectivement. Il y a encore un mémoire [6] qui concerne la capacité logarithmique d'un ensemble plan de type de Cantor.

Dans ce mémoire nous évaluerons les capacités des ensembles de Cantor généralisés symétriques dans E_n ($n \geq 1$); l'auteur n'obtient aucune condition dans le cas non-symétrique. Le théorème étendra à la fois les résultats de l'auteur et de af Hällström.

2. THÉORÈME. Soit $F = F(k_q, p_q) \times \dots \times F(k_q, p_q)$ un ensemble de Cantor généralisé symétrique dans E_n ($n \geq 1$). Pour qu'il soit d' α -capacité nulle ($0 \leq \alpha < n$), il faut et il suffit que

$$(3) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(p_1 \cdots p_q)^\alpha}{(k_1 \cdots k_q)^{n-\alpha}} = \infty \quad (0 < \alpha < n)$$

ou

$$(4) \quad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{(k_1 \cdots k_q)^n} = \infty \quad (\alpha = 0).$$

Désignons par $\{I_{q\nu}^{(j)}\}$ les intervalles qui restent lorsque la q -opération est appliquée sur l'axe de x_j , par λ_q leur longueur et par δ_q la longueur des intervalles enlevés lors de la q -opération;

$$\lambda_q = \frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_q}, \quad \delta_q = \lambda_{q-1} \frac{1 - \frac{1}{p_q}}{k_q - 1} = \frac{p_q - 1}{k_1 \cdots k_{q-1} (k_q - 1) p_1 \cdots p_q}$$

On fera souvent l'usage de l'inégalité double suivante sans le dire explicitement :

$$\frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_{q-1}} \leq \delta_q + \lambda_q = \frac{1}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_q} \frac{k_q p_q - 1}{k_q - 1} \leq \frac{2}{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_{q-1}}$$

Soit μ une mesure positive portée par F de masse totale unité et soit $U_\mu^\alpha(P)$ le potentiel d'ordre α engendré par μ dans E_n . Nous posons

$$\mu(I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)}) = \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n).$$

Considérons les points $\{P_\kappa^{(q)}\}$, $\kappa = 1, \dots, (k_1 \cdots k_{q-1} (k_q - 1))^n \equiv M_q$, tels que la projection de chaque point sur tout axe coïncide avec un certain point placé au centre d'un intervalle qu'on enlève lors de la q -opération. On désigne par $\rho(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)})$ la distance de $P_\kappa^{(q)}$ à $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ et par $\rho'(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)})$ le diamètre de la réunion de $P_\kappa^{(q)}$ et $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$. Si

$$0 < \Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n) \leq \rho(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)}) < \rho'(P_\kappa^{(q)}, I_{q\nu_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q\nu_n}^{(n)}) \leq d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n),$$

on a

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \frac{\mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n)}{\{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)\}^\alpha} \leq U_\alpha^\mu(P_\kappa^{(q)}) \leq \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \frac{\mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n)}{\{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)\}^\alpha} \quad (0 < \alpha < n)$$

et

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \log \frac{1}{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)} \leq U_0^\mu(P_\kappa^{(q)}) \leq \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \log \frac{1}{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)}.$$

Posons u_q égal à la moyenne des valeurs $\{U_\alpha^\mu(P_\kappa^{(q)})\}$, $\kappa = 1, \dots, M_q$. Alors

$$(5) \quad \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \frac{1}{\{d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)\}^\alpha} \leq u_q \leq \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \cdots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \frac{1}{\{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)\}^\alpha} \quad (0 < \alpha < n)$$

ou

$$(6) \quad \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \dots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \log \frac{1}{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)} \leq u_q$$

$$\leq \frac{1}{M_q} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \dots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \sum_{\kappa=1}^{M_q} \log \frac{1}{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)}.$$

En premier lieu nous nous occupons du cas $0 < \alpha < n$. Si $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ se place strictement dans l'intérieur de $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$, nous prenons 2^n points de $\{P_\kappa^{(q)}\}$ qui se trouvent sur la surface du cube de côté $\delta_q + \lambda_q$ et entourant $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$, et nous posons $\Delta_\kappa^{(q)} = \delta_q/2$ pour ces points; ces points sont à distance $\sqrt{n} \delta_q/2$ de $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$. Si $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ touche la surface de $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ le nombre des points qui sont à distance $\sqrt{n} \delta_q/2$ de $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ est strictement inférieur à 2^n . Dans ce cas, nous prenons les points situés à distance $\sqrt{n} \delta_q/2$ d'un certain des cubes $\{I_{q\pi_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\pi_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ mais se placent dans d'autres $\{I_{q-1, \pi_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \pi_n'}^{(n)}\}$. Ainsi on trouve 2^n points qui entourent $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$ en un certain sens, et on pose $\Delta_\kappa^{(q)} = \delta_q/2$ pour eux. Ensuite considérons les points de $\{P_\kappa^{(q)}\}$ qui sont situés sur la surface du cube de côté $3(\delta_q + \lambda_q)$ et entourant $I_{q\nu_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q\nu_n}^{(n)}$, et posons $\Delta_\kappa^{(q)} = \delta_q + \lambda_q$ pour eux. S'il n'y a pas $(2 \cdot 2)^n - (2 \cdot 1)^n$ tels points, nous comptons certains points dans $\{I_{q-1, \rho_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \rho_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ comme plus haut et posons encore $\Delta_\kappa^{(q)} = \delta_q + \lambda_q$. On continue ce procédé. Alors

$$\sum_{s=1}^{2k_q} \frac{\{2(s+1)\}^n - (2s)^n}{s^\alpha (\delta_q + \lambda_q)^\alpha}$$

majorera la somme $\sum 1/\{\Delta_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n)\}^\alpha$ étendue sur tous les points dans $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ et tous les points dans $\{I_{q-1, \rho_1}^{(1)} \times \dots \times I_{q-1, \rho_n}^{(n)}\}$ qui sont les voisins de celui-ci.

Telle considération nous amène à l'évaluation suivante :

$$M_q u_q \leq \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{k_1 \dots k_q} \mu_q(\nu_1, \dots, \nu_n) \left\{ 2^n \frac{2^\alpha}{\delta_q^\alpha} + 2^n \sum_{s=1}^{2k_q} \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha (\delta_q + \lambda_q)^\alpha} \right.$$

$$+ 2^n (k_q - 1)^n \sum_{s=1}^{2k_{q-1}} \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^\alpha} + \dots +$$

$$\left. + 2^n (k_q - 1)^n k_{q-1}^n \dots k_2^n \sum_{s=1}^{2k_1} \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha (\delta_1 + \lambda_1)^\alpha} \right\}$$

$$= 2^n \left\{ \frac{2^\alpha}{\delta_q^\alpha} + \frac{1}{(\delta_q + \lambda_q)^\alpha} \sum_{s=1}^{2k_q} \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha} + \dots + \frac{(k_q - 1)^n k_{q-1}^n \dots k_2^n \sum_{s=1}^{2k_1} \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha} \right\}.$$

Puisque $(s + 1)^n - s^n \leq (2^n - 1) s^{n-1}$ pour $s \geq 1$, on a

$$\sum_{s=1}^k \frac{(s+1)^n - s^n}{s^\alpha} \leq (2^n - 1) \sum_{s=1}^k s^{n-\alpha-1} \leq \frac{2^n - 1}{n - \alpha} (2k)^{n-\alpha}.$$

Donc

$$u_q \leq \frac{2^{n+\alpha}}{(k_1 \dots k_{q-1} (k_q - 1))^n} \frac{1}{\delta_q^\alpha} + \frac{2^n (2^n - 1) 4^{n-\alpha} 2^{n-1} \sum_{i=0}^{q-1} \frac{(p_0 \dots p_i)^\alpha}{(k_0 \dots k_i)^{n-\alpha}}}{n - \alpha} \equiv 2^{n+\alpha} \sigma_q + \Sigma_q$$

avec $k_0 = p_0 = 1$; dans cette évaluation on utilise l'inégalité $k_i / (k_i - 1) \leq 2$ pour $k_i \geq 2$.

Supposons que la série de (3) soit convergente; alors Σ_q est borné. Si $(k_1 \dots k_{qj-1} (k_{qj} - 1))^n \delta_{qj}^\alpha \geq 1$ pour $j = 1, 2, \dots$, les moyennes $\{u_{qj}\}_{j=1,2,\dots}$ sont visiblement bornées par une constante $c < +\infty$. Par suite pour chaque j un au moins de $\{U_\alpha^\mu(P_{k_j}^{(qj)})\}$, soit $U_\alpha^\mu(P_{k_j}^{(qj)})$, est $< c$. On peut en conclure que $C^{(\alpha)}(F) > 0$. En effet, si $C^{(\alpha)}(F) = 0$, il existerait une mesure positive μ portée par F telle que $U_\alpha^\mu(P) = +\infty$ en chaque point de F ; voir [9] pour ce fait. Puisque $P_{k_j}^{(qj)}$ vient arbitrairement voisin de F lorsque $j \rightarrow \infty$, $U_\alpha^\mu(P_{k_j}^{(qj)}) \rightarrow +\infty$ avec j , qui est absurde. Ainsi $C^{(\alpha)}(F) > 0$.

Or, supposons que

$$(k_1 \dots k_{q-1} (k_q - 1))^n \delta_q^\alpha \leq 1 \quad \text{pour tout } q \geq q_0 > 1.$$

Alors pour $q \geq q_0$ on a

$$(p_q - 1)^\alpha \leq \frac{(p_1 \dots p_q)^\alpha}{(k_1 \dots k_q)^{n-\alpha}} 2^{n-\alpha},$$

qui tend vers 0 avec $1/q$ d'après notre hypothèse ci-dessus, d'où $p_q \rightarrow 1$ lorsque $q \rightarrow \infty$. Il existe alors un entier q_1 et un nombre ξ tels que $p_q / 2^{(n-\alpha)/\alpha} < \xi < 1$ pour tout $q \geq q_1$. On aura

$$\sum_{q=q_1}^\infty (p_q - 1) \leq 2^{(n-\alpha)/\alpha} \frac{p_1 \dots p_{q_1-1}}{(k_1 \dots k_{q_1-1})^{(n-\alpha)/\alpha}} \sum_{q=q_1}^\infty \frac{p_q \dots p_q}{(k_{q_1} \dots k_q)^{(n-\alpha)/\alpha}}$$

$$< 2^{(n-\alpha)/\alpha} \frac{p_1 \cdots p_{q_1-1}}{(k_1 \cdots k_{q_1-1})^{(n-\alpha)/\alpha}} \sum_{q=q_1}^{\infty} \xi^{q-q_1+1} < \infty.$$

Par conséquent, la mesure de Lebesgue de n dimensions de F qui est égale à $\lim_{q \rightarrow \infty} 1/(p_1 \cdots p_q)^n$ est positive. Puisque la dimension hausdorffienne est égale à la dimension capacitaire, $C^{(\beta)}(F) > 0$ pour tout β , $0 \leq \beta < n$, certainement pour α .

Ensuite nous nous servirons de l'inégalité gauche de (5). Pour $\{P_\kappa^{(q)}\}$ placés dans $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \cdots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ qui contient $I_{q_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q_n}^{(n)}$ nous posons

$$d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n) = \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_q + \lambda_q)^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} (k_q - 1) (\delta_q + \lambda_q),$$

où chaque s_j varie de 1 à $k_q - 1$. Pour $\{P_\kappa^{(q)}\}$ placés dans $I_{q-2, \nu_1''}^{(1)} \times \cdots \times I_{q-2, \nu_n''}^{(n)} \supset I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \cdots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ mais pas dans $I_{q-1, \nu_1'}^{(1)} \times \cdots \times I_{q-1, \nu_n'}^{(n)}$ on pose

$$d_\kappa^{(q)}(\nu_1, \dots, \nu_n) = \left(\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} k_{q-1} (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1}),$$

où chaque s_j varie de 2 à k_{q-1} ; pour les points dans le même cube qui est de la forme $I_{q-1}^{(1)} \times \cdots \times I_{q-1}^{(n)}$ nous donnons la même valeur de $d_\kappa^{(q)}$. Et ainsi de suite. On aura

$$\begin{aligned} M_q u_q &\cong \sum_{s_1=1}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_{n-1}=1}^{k_q-1} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_q + \lambda_q)^2 \right)^{\alpha/2}} \\ &+ (k_q - 1)^n \sum_{s_1=2}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_{n-1}=2}^{k_q-1} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2 \right)^{\alpha/2}} + \cdots \\ &+ (k_q - 1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n \sum_{s_1=2}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_1} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_1 + \lambda_1)^2 \right)^{\alpha/2}} \\ &\cong (n^{\alpha/2} 2^{n+\alpha})^{-1} \{ (k_1 \cdots k_{q-1} p_1 \cdots p_{q-1})^\alpha (k_q - 1)^n \\ &+ (k_1 \cdots k_{q-2} p_1 \cdots p_{q-2})^\alpha k_{q-1}^n (k_q - 1)^n + \cdots \\ &+ k_1^n \cdots k_{q-1}^n (k_q - 1)^n \}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_q \cong \frac{1}{n^{\alpha/2} 2^{n+\alpha}} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(p_1 \cdots p_i)^\alpha}{(k_1 \cdots k_i)^{n-\alpha}}.$$

Si $C^{(\alpha)}(F) > 0$, on peut choisir μ tel que $U_\alpha^\mu(P)$ soit uniformément borné par un nombre fini η . Donc la moyenne $u_q < \eta$ et la série de (3) doit converger.

Enfin nous prouverons le théorème dans le cas logarithmique: $\alpha = 0$. De (6) il vient comme plus haut

$$\begin{aligned}
 M_q u_q &\leq 2^{n+1} \log 2 + 2^n \log (1/\delta_q) + 2^n \sum_{s=1}^{2k_q} \{(s+1)^n - s^n\} \log \frac{1}{s(\delta_q + \lambda_q)} \\
 &+ 2^n (k_q - 1)^n \sum_{s=1}^{2k_{q-1}} \{(s+1)^n - s^n\} \log \frac{1}{s(\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})} + \dots \\
 &+ 2^n (k_q - 1)^n k_{q-1}^n \dots \cdot k_2^n \sum_{s=1}^{2k_1} \{(s+1)^n - s^n\} \log \frac{1}{s(\delta_1 + \lambda_1)}.
 \end{aligned}$$

Distinguons le cas $n \geq 2$ du cas $n = 1$. Dans le cas $n \geq 2$ nous notons que la fonction $x^{n-1} \log 1/x$ est croissante dans $0 \leq x \leq e^{-1/(n-1)}$. Puisque $2k_q(\delta_q + \lambda_q) \rightarrow 0$ avec $1/q$, nous pouvons trouver q_2 tel que $2k_q(\delta_q + \lambda_q) \leq e^{-1/(n-1)}$ soit vrai pour tout $q \geq q_2$. En désignant par Σ_1 la somme

$$\begin{aligned}
 &2^n (k_q - 1)^n \dots \cdot k_{q_2}^n \sum_{s=1}^{2k_{q_2-1}} \{(s+1)^n - s^n\} \log \frac{1}{s(\delta_{q_2-1} + \lambda_{q_2-1})} \\
 &+ \dots + \text{le dernier terme,}
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
 M_q u_q &\leq 2^{n+1} \log 2 + 2^n \log (1/\delta_q) + 2^n (2^n - 1) \sum_{s=1}^{2k_q} s^{n-1} \log \frac{1}{s(\delta_q + \lambda_q)} \\
 &+ \dots + 2^n (2^n - 1) (k_q - 1)^n \dots \cdot k_{q_2+1}^n \sum_{s=1}^{2k_{q_2}} s^{n-1} \log \frac{1}{s(\delta_{q_2} + \lambda_{q_2})} + \Sigma_1 \\
 &\leq 2^{n+1} \log 2 + 2^n \log (1/\delta_q) + 2^n (2^n - 1) 2k_q (2k_q)^{n-1} \log \frac{1}{2k_q(\delta_q + \lambda_q)} \\
 &+ \dots + \Sigma_1.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^{2k} \log (1/s) &\leq \int_2^{2k} \log (1/x) dx = [x - x \log x]_2^{2k} \\
 &= 2k - 2k \log 2k - 2(1 - \log 2) \leq 2k - 2k \log 2k \leq -2k \log (k/2),
 \end{aligned}$$

on a dans le cas $n = 1$

$$M_q u_q \leq 2^2 \log 2 + 2 \log (1/\delta_q) + 2 \cdot 2k_q \log \frac{2}{k_q(\delta_q + \lambda_q)} + \dots ;$$

dans ce cas nous poserons $q_2 = 0$.

Ainsi dans tous les cas nous avons

$$\begin{aligned}
 (7) \quad u_q &\leq \frac{2^{n+1} \log 2}{M_q} + \frac{2^n}{M_q} \log \frac{k_1 \cdots k_q p_1 \cdots p_q}{p_q - 1} + \frac{2^{3n} k_q^n}{M_q} \log \frac{2}{k_q(\delta_q + \lambda_q)} \\
 &\quad + \frac{2^{3n}(k_q - 1)^n k_{q-1}^n}{M_q} \log \frac{2}{k_{q-1}(\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})} + \dots + \Sigma_1 \\
 &\leq \frac{2^{n+1} \log 2}{M_q} + \frac{2^n}{M_q} \left\{ \log(k_1 \cdots k_q) + \log \frac{(p_1 \cdots p_q)}{p_q - 1} \right\} \\
 &\quad + \frac{2^{3n} k_q^n}{M_q} \log(2k_1 \cdots k_{q-1} p_1 \cdots p_{q-1}) \\
 &\quad + \frac{2^{3n} k_{q-1}^n (k_q - 1)^n}{M_q} \log(2k_1 \cdots k_{q-2} p_1 \cdots p_{q-2}) + \dots + \Sigma_1.
 \end{aligned}$$

Observons que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log(k_1 \cdots k_q)}{(k_1 \cdots k_q)^n} < \infty$$

et

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_q^n}{M_q} \log(2k_1 \cdots k_{q-1}) + \frac{k_{q-1}^n (k_q - 1)^n}{M_q} \log(2k_1 \cdots k_{q-2}) + \dots \\
 &\leq 2^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log(2k_1 \cdots k_q)}{(k_1 \cdots k_q)^n} < \infty,
 \end{aligned}$$

et écartons les séries dans (7) qui sont visiblement convergentes. Il en reste

$$\begin{aligned}
 &\frac{2^n}{M_q} \log \frac{p_1 \cdots p_q}{p_q - 1} + \frac{2^{3n} k_q^n \log(p_1 \cdots p_{q-1})}{(k_1 \cdots k_{q-1} (k_q - 1))^n} \\
 &\quad + \frac{2^{3n} k_{q-1}^n (k_q - 1)^n \log(p_1 \cdots p_{q-2})}{(k_1 \cdots k_{q-1} (k_q - 1))^n} + \dots
 \end{aligned}$$

Supposons que $p_q \rightarrow 1$ lorsque $q \rightarrow \infty$. Si on tient compte de l'inégalité $k_q \geq 2$, on voit facilement que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(p_1 \cdots p_q)^\beta}{(k_1 \cdots k_q)^{n-\beta}} < \infty$$

pour β quelconque dans $(0, n)$. Nous avons déjà vu qu'alors $C^{(\beta)}(F) > 0$, d'où $C^{(0)}(F) > 0$. Par suite nous supposons qu'il existe $p_0 > 1$ tel que $p_{q_j} \geq p_0$ pour $j = 3, 4, \dots$. Alors les termes qui peuvent croître sont

$$(8) \quad 2^{4n} \sum_{i=q_2}^{q_1} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n}.$$

Remarquons que

$$0 \cong \sum_{i=1}^q \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} - \sum_{i=1}^q \frac{\log p_i}{(k_1 \cdots k_i)^n} = \sum_{i=2}^q \frac{\log(p_1 \cdots p_{i-1})}{(k_1 \cdots k_{i-1})^n k_i^n}$$

$$\cong \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} \cong \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^q \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n}$$

et donc que

$$\sum_{i=1}^q \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n} \cong \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{i=1}^q \frac{\log p_i}{(k_1 \cdots k_i)^n}.$$

Il en résulte que la convergence de la série de (4) assure la convergence de (8), d'où $\{u_{q_j}\}_{j=3,4,\dots}$ sont uniformément bornés et on peut en déduire $C^{(0)}(F) > 0$ comme dans le cas $\alpha > 0$.

Il reste à démontrer que (4) entraîne $C^{(0)}(F) = 0$. Comme plus haut on a

$$M_q u_q \cong \frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_n=1}^{k_q-1} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_q + \lambda_q)^2}$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n}{2} \sum_{s_1=2}^{k_q-1} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_q-1} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2} + \dots$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n k_1^n \cdots k_2^n}{2} \sum_{s_1=2}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=2}^{k_n} \log \frac{1}{\sum_{j=1}^n s_j^2 (\delta_1 + \lambda_1)^2}$$

$$\cong \frac{(k_q-1)^n}{2} \log \frac{1}{n(k_q-1)^2 (\delta_q + \lambda_q)^2}$$

$$+ \frac{(k_q-1)^n (k_{q-1}-1)^n}{2} \log \frac{1}{nk_{q-1}^2 (\delta_{q-1} + \lambda_{q-1})^2}$$

$$+ \dots + \frac{(k_q-1)^n k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n}{2} \log \frac{1}{nk_1^2 (\delta_1 + \lambda_1)^2}$$

$$\cong \frac{(k_q-1)^n}{2} \log \frac{1}{n} \cdot \{1 + (k_{q-1}-1)^n + k_{q-1}^n (k_{q-2}-1)^n + \dots$$

$$+ k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n\} + (k_q-1)^n \log(k_1 \cdots k_{q-1} p_1 \cdots p_{q-1})$$

$$+ (k_q-1)^n (k_{q-1}-1)^n \log\{(k_1 \cdots k_{q-2} p_1 \cdots p_{q-2})/2\} + \dots$$

La série $(k_q-1)^n M_q^{-1} \{1 + (k_{q-1}-1)^n + k_{q-1}^n (k_{q-2}-1)^n + \dots + k_{q-1}^n \cdots k_2^n (k_1-1)^n\}$ et la série $(k_q-1)^n M_q^{-1} [\log(k_1 \cdots k_{q-1}) + (k_{q-1}-1)^n \log\{(k_1 \cdots k_{q-2})/2\} + \dots]$ sont visiblement convergentes lorsque $q \rightarrow \infty$. La série qui reste dans l'inégalité pour u_q est

$$\begin{aligned} & \frac{\log(p_1 \cdots p_{q-1})}{(k_1 \cdots k_{q-1})^n} + \frac{1}{2^n} \frac{\log(p_1 \cdots p_{q-2})}{(k_1 \cdots k_{q-2})^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ & \equiv \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\log(p_1 \cdots p_i)}{(k_1 \cdots k_i)^n}. \end{aligned}$$

Si $C^{(0)}(F) > 0$, on peut choisir μ telle que $U_0^\mu(P)$ soit uniformément borné. Il s'ensuit que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log p_q}{(k_1 \cdots k_q)^n} < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log(p_1 \cdots p_q)}{(k_1 \cdots k_q)^n} < \infty,$$

contrairement à (4).

Le théorème est ainsi complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. af Hällström : Zur Berechnung der Bodenordnung oder Bodenhyperordnung eindeutiger Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn., A. I., (1955), no. 193, 16 pp.
- [2] G. af Hällström : On the capacity of generalized Cantor sets, Acta Acad. Aboensis Math. Phys., **20** : 8 (1955), 8 pp.
- [3] R. Nevanlinna : Eindeutige analytische Funktionen, Berlin (1936).
- [4] M. Ohtsuka : Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications, Ann. Inst. Fourier, **5** (1955), pp. 1-28.
- [5] G. Pólya und G. Szegő : Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, Crelle J., **165** (1931), pp. 4-49.
- [6] A. E. Riiber : Über meromorphe Funktionen mit einem Existenzgebiete, dessen Rand eine Cantor'sche Punktmenge von der Kapazität null ist, Math. Scand., **3** (1955), pp. 229-242.
- [7] R. Salem and A. Zygmund : Capacity of sets and Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., **59** (1946), pp. 23-41.
- [8] M. Tsuji : On the capacity of general Cantor sets, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), pp. 235-252.
- [9] T. Ugaheri : On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., series B, no. 4 (1953), pp. 149-179.

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya