Canad. J. Math. Vol. **54** (2), 2002 pp. 263–302

Intégrales orbitales pondérées sur les algèbres de Lie : le cas p-adique

Pierre-Henri Chaudouard

Résumé. Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps p-adique F et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Les intégrales orbitales pondérées sur $\mathfrak{g}(F)$ sont des distributions $J_M(X, f)$—f est une fonction test—indexées par les sous-groupes de Lévi M de G et les éléments semi-simples réguliers $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Leurs analogues sur G sont les principales composantes du côté géométrique des formules des traces locale et globale d'Arthur.

Si $M = G$, on retrouve les intégrales orbitales invariantes qui, vues comme fonction de X, sont bornées sur $\mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$: c'est un résultat bien connu de Harish-Chandra. Si $M \subsetneq G$, les intégrales orbitales pondérées explosent au voisinage des éléments singuliers. Nous construisons dans cet article de nouvelles intégrales orbitales pondérées $J_M^b(X, f)$, égales à $J_M(X, f)$ à un terme correctif près, qui tout en conservant les principales propriétés des précédentes (comportement par conjugaison, développement en germes, *etc.*) restent bornées quand X parcourt $\mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Nous montrons également que les intégrales orbitales pondérées globales, associées à des éléments semi-simples réguliers, se décomposent en produits de ces nouvelles intégrales locales.

Introduction

Soient p un nombre premier, F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour toute fonction f localement constante et à support compact et pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$, on dispose de l'intégrale orbitale invariante

$$J_G(X, f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|^{1/2} \int_{Z_{G(F)}(X)\backslash G(F)} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, dx,$$

obtenue par intégration de f relativement à une mesure invariante sur la classe de $G(F)$-conjugaison de X dans $\mathfrak{g}(F)$. On connaît le rôle joué par ces distributions dans l'analyse harmonique du groupe $G(F)$. Elles apparaissent également, ou plutôt leurs analogues sur le groupe $G(F)$, dans les formules des traces locale et globale établies par Arthur (*cf.* [7] et [1]). Ces formules font intervenir d'autres distributions qui ne sont pas invariantes : les intégrales orbitales pondérées. Leurs analogues sur $\mathfrak{g}(F)$ sont des distributions indexées par des composantes de Lévi M de sous-groupes paraboliques définis sur F et des éléments X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(F)$ de $M(F)$. Lorsque le centralisateur de X dans $G(F)$ est inclus dans $M(F)$, ces intégrales s'écrivent

$$J_M(X, f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|^{1/2} \int_{Z_{G(F)}(X)\backslash G(F)} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, v_M(x)\, dx,$$

Reçu par la rédaction le 27 juillet, 2001; revu le 18 septembre, 2001.
Classification (AMS) par sujet: primaire : 22E35 ; secondaire : 11F70.

où $v_M(X)$ est un certain poids, source de leur non-invariance. Pour un élément X quelconque, la définition est moins immédiate.

Les intégrales orbitales pondérées ne sont pas des objets aussi naturels que les intégrales orbitales invariantes : leur définition dépend du choix d'une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique minimal et d'un sous-groupe compact maximal de $G(F)$. On s'aperçoit également, quand on manipule les formules des traces, que c'est moins la distribution $J_M(X,\cdot)$ que l'espace affine $\mathcal{J}_M(X)$ défini ci-dessous qui semble jouer un rôle :

$$\mathcal{J}_M(X) = J_M(X,\cdot) + \mathrm{Vect}_{L\in\mathcal{L}'(M)}\big(J_L(X,\cdot)\big),$$

où $\mathcal{L}'(M)$ est l'ensemble des composantes de Lévi contenant strictement M.

Par ailleurs, les intégrales orbitales pondérées partagent avec les intégrales orbitales invariantes beaucoup de propriétés. En particulier, elles admettent au voisinage de 0 un développement en germes semblable au développement en germes de Shalika (voir [13] et [11] Section 8). Cependant, un résultat de Harish-Chandra (*cf.* [10]) affirme que

$$\sup |J_G(X,f)| < \infty \tag{0.1}$$

où le supremum est pris sur les éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}(F)$. Ce résultat ne subsiste pas pour les intégrales orbitales pondérées.

Forts de ces deux constatations, nous nous proposons dans cet article de construire pour $X \in \mathfrak{m}(F)$ des distributions $J^b_M(X,\cdot) \in \mathcal{J}_M(X)$ de sorte que

$$\sup |J^b_M(X,f)| < \infty, \tag{0.2}$$

où le supremum est pris sur les éléments de $\mathfrak{m}(F)$ semi-simples G-réguliers. En particulier on trouve des coefficients $r^L_M(X)$ de sorte que pour toute fonction f

$$J^b_M(X,f) = J_M(X,f) + \sum_{L\in\mathcal{L}'(M)} r^L_M(X) J_L(X,f). \tag{0.3}$$

Ces coefficients ne sont pas complètement nouveaux. Supposons un instant que M soit déployé sur F. Fixons un élément $u \in M(F)$ unipotent régulier et une fonction exponentielle notée exp définie dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$. Arthur, dans [6], introduit des fonctions $\gamma \mapsto r^L_M(u,\gamma)$ définies pour γ dans un ouvert du centre de $M(F)$. *Mutatis mutandis*, on a la formule suivante, valable pour X dans un certain ouvert du centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}(F)$:

$$r^L_M(X) = r^L_M(u, \exp X).$$

Soit $U \in \mathfrak{g}(F)$ tel que $u = \exp U$. Quand X tend vers 0 en restant dans cet ouvert, $J^b_M(X+U,f)$ admet une limite égale à $J_M(U,f)$ (C'est une conséquence des travaux d'Arthur, *cf.* [16] III.2). Dans le cas général, on exigera des coefficients $r^L_M(X)$ qu'ils vérifient une propriété analytique analogue.

Pour illustrer notre propos, nous terminons par une formule exprimant des objets adéliques (les distributions associées aux éléments semi-simples réguliers dans la formule des traces pour les algèbres de Lie [8]) à l'aide des intégrales orbitales pondérées locales contruites sur le modèle précédent.

Cet article est rédigé ainsi : dans la partie 1, nous rappelons les diverses hypothèses, notations et définitions dont nous aurons besoin par la suite.

La partie 2 est consacrée à la construction de coefficients qui permettent de définir, au début de la partie 3, les fonctions $r_M^L(X)$. Cette partie est essentiellement algébrique et utilise les résultats d'Arthur de [6].

Dans la partie 3, nous définissons de nouvelles intégrales pondérées, notées $J_M^{G,b}(X, f)$, sur le modèle de (0.3) et nous passons en revue leurs principales propriétés (comportement par conjugaison, descente, homogénéité et développement en germes). En particulier, dans la sous-partie 3.3, nous montrons, pour ces nouvelles distributions, la propriété analytique dont nous venons de parler.

Le résultat principal de l'article est énoncé au début de la partie 4 et se formule ainsi : l'intégrale $J_M^{G,b}(X, f)$ est bornée quand X parcourt l'ensemble des éléments semi-simples G-réguliers de $\mathfrak{m}(F)$. La démonstration, qui se fait par récurrence sur la dimension de G, occupe toute la partie 4. Les sous-parties 4.1 et 4.2 sont consacrées à quelques réductions classiques : réduction au cas semi-simple, descente au centralisateur. Dans la sous-partie 4.3, nous déduisons de l'hypothèse de récurrence des résultats qualitatifs sur les germes qui nous permettent dans la sous-partie 4.4 d'étudier les intégrales $J_M^{G,b}(X, f)$ pour X dans un voisinage de 0.

Dans la dernière partie, après un résultat de convergence concernant des intégrales archimédiennes (sous-partie 5.1), nous montrons comment les intégrales orbitales pondérées adéliques s'expriment en fonction des intégrales pondérées locales que nous avons construites.

Remerciements Je voudrais remercier ici J.-L. Waldspurger pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la réalisation de ce travail.

1 Notations et définitions

1.1 Hypothèses

1.1.1

On suppose que F_v est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On note $|\cdot|_v$ la valeur absolue usuelle de F_v.

1.1.2

On notera G un groupe algébrique réductif connexe défini sur F_v. Tous les groupes considérés dans la suite seront supposés définis sur F_v. On posera $G_v = G(F_v)$. On note A_G le plus grand tore déployé et central de G. Par abus, on notera encore G le groupe des points de G sur une clôture algébrique de F_v.

On fixe un sous-groupe de Lévi M_0 d'un sous-groupe parabolique minimal de

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

G. On fixe également un sommet spécial dans l'appartement associé à A_{M_0} de l'immeuble de Bruhat-Tits de G_v. On en déduit un sous-groupe compact maximal K_v de G_v. On dira que K_v est en bonne position par rapport à M_0.

1.1.3

On appelle sous-groupe de Lévi de G un groupe M qui contient M_0 et qui est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique de G. Pour un tel sous-groupe, on note $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{P}(M)$ et $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant M, resp. des sous-groupes paraboliques de G de Lévi M, resp. des sous-groupes de Lévi de G contenant M. Parfois on notera $\mathcal{F}^G(M)$ si l'on veut souligner la dépendance vis-à-vis du groupe G. On posera aussi $\mathcal{F}^0(M) = \mathcal{F}(M) - \{G\}$ et $\mathcal{L}^0(M) = \mathcal{L}(M) - \{G\}$.

1.1.4

On définit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $a_G = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X(G)_{F_v}, \mathbb{R}\big)$, où $X(G)_{F_v}$ est le groupe des caractères de G rationnels sur F_v. On définit une application $H_G \colon G_v \to a_G$ par $\langle H_G(x), \chi\rangle = \log\big(|\chi(x)|_v\big)$ pour tous $x \in G_v$ et $\chi \in X(G)_{F_v}$.

Si $P \in \mathcal{F}(M_0)$, on note N_P son radical unipotent et M_P sa composante de Lévi contenant M_0. On note $\bar{P}$ le parabolique opposé à P et contenant M_P. L'espace a_{M_P} s'identifie à un sous-espace de a_{M_0}. On définit alors une application $H_P \colon G_v \to a_{M_P}$ par $H_P(nmk) = H_M(m)$ pour tous $m \in M_{P,v}$, $n \in N_{P,v}$ et $k \in K_v$. On a noté $M_{P,v}$ l'ensemble $(M_P)_v$. De façon générale, on note côte à côte les indices chaque fois que cela ne prête pas à confusion.

1.1.5

Soit M un sous-groupe de Lévi de G et H un sous-groupe de G normalisé par M. On note $\Sigma(H, A_M)$, resp. $\Sigma^{\mathrm{nd}}(H, A_M)$, l'ensemble des racines de A_M dans H, resp. des racines non divisibles de A_M dans H. Soit P un sous-groupe parabolique de G. On note Δ_P l'ensemble des racines simples dans $\Sigma^{\mathrm{nd}}(P, A_{M_P})$. Notons $a^*_{M_P}$ l'espace vectoriel dual de a_{M_P}. Les ensembles $\Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_{M_P})$ et $\Sigma^{\mathrm{nd}}(P, A_{M_P})$ sont canoniquement inclus dans $a^*_{M_P}$. Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$. Il existe $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $\beta \in \Delta_P$ et P_0 un sous-groupe parabolique minimal contenu dans P. Dans ce cas, β est la restriction à a_M d'une unique racine $\beta_0 \in \Delta_{P_0}$. On définit alors la coracine $\beta^\vee$ comme la projection de la coracine $\beta_0^\vee$ sur a_M. On vérifie que $\beta^\vee$ ne dépend que de β et non pas des choix de P et P_0. On définit alors dans a_{M_P} le sous-ensemble $\Delta_P^\vee$ des coracines des éléments de Δ_P et $a^G_{M_P}$ le sous-espace de a_{M_P} engendré par $\Delta_P^\vee$.

1.1.6

Posons $W^G = \operatorname{Norm}_G(M_0)/M_0$ où $\operatorname{Norm}_G(M_0)$ est le normalisateur de M_0 dans G. Le groupe W^G agit naturellement sur a_{M_0}. On fixe une norme euclidienne sur a_{M_0} invariante par l'action de W^G. On en déduit une mesure sur tout sous-espace de a_{M_0}.

1.1.7

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et plus généralement, si H est un sous-groupe de G, on note par la lettre minuscule gothique $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. On note $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{g}(F_v)$. Le groupe G , resp. l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, agit sur $\mathfrak{g}$ par l'application adjointe que l'on note Ad, resp. ad. On prendra garde à ne pas confondre l'algèbre de Lie de A_G notée $\mathfrak{a}_G$ avec l'espace vectoriel réel a_G.

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on note $Z_H(X)$, resp. $\mathfrak{g}_X$, le stabilisateur de X sous l'action d'un sous-groupe H de G, resp. sous l'action par adjonction de $\mathfrak{g}$. Lorsque, de plus, H est un sous-groupe fermé de G, on note H_X la composante neutre de $Z_H(X)$.

On note $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire les éléments semi-simples X tels que $Z_G(X)$ soit un sous-tore maximal de G. On dit qu'un sous-tore maximal T de G est G-elliptique si $A_T = A_G$. Si M est un sous-groupe de Lévi de G, on note $\mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg}}$ le sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ formé des X qui vérifient $Z_G(X) = Z_M(X)$.

On note $\mathcal{N}_G$ la variété formée des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. On distingue le sous-ensemble $\mathcal{N}_{G,\mathrm{reg}}$ formé des éléments nilpotents réguliers *i.e.* des éléments nilpotents pour lesquels la dimension du centralisateur est égale au rang de G. Sous l'action de G, $\mathcal{N}_G$ se décompose en un nombre fini d'orbites et il existe une unique orbite ouverte et dense qui est $\mathcal{N}_{G,\mathrm{reg}}$ (*cf.* par exemple [9]). On note $\mathcal{N}_{G_v}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}_v$: c'est une réunion finie de classes de conjugaison sous l'action de G_v. Rappelons qu'il existe des éléments réguliers dans $\mathcal{N}_{G_v}$ si et seulement si G est quasi-déployé sur F_v.

1.1.8

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on dispose de la décomposition de Jordan $X = X_s + X_n$ où X_s et X_n sont des éléments de $\mathfrak{g}$ respectivement semi-simple et nilpotent, qui commutent. On pose

$$D^{\mathfrak{g}}(X) = \det(\mathrm{ad}\, X|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{X_s}).$$

1.1.9

On note $C_c^\infty(G_v)$, resp. $C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, l'espace des fonctions sur G_v, resp. $\mathfrak{g}_v$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. Pour $f \in C_c^\infty(G_v)$ ou $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, on note $\mathrm{supp}(f)$ le support de f. Par dualité, de l'action de G_v sur $\mathfrak{g}_v$ par adjonction, on déduit une action de G_v sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$ que l'on note encore Ad.

On fixe sur K_v la mesure de Haar de masse totale 1. On fixe des mesures de Haar sur G_v et pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ sur $M_{P,v}$ et $N_{P,v}$ de sorte que pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$ et toute $f \in C_c^\infty(G_v)$

$$\int_{G_v} f(x)\, dx = \int_{M_{P,v} \times N_{P,v} \times K_v} f(mnk)\, dm\, dn\, dk.$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}_v$, le groupe $Z_{G_v}(X)$ est unimodulaire. Par conséquent, l'espace homogène $Z_{G_v}(X) \setminus G_v$ possède une mesure invariante à droite unique à un facteur près. On fixe une telle mesure et une mesure de Haar sur $Z_{G_v}(X)$ de sorte que la mesure produit soit la mesure sur le groupe G_v. On fait également des choix pour les objets analogues sur tout sous-groupe de Lévi de G. On impose alors les conditions de compatibilité suivantes (pour G et pour tout sous-groupe de Lévi de G) :

- Pour $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et tout $X \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_G(X)_v = Z_M(X)_v$, les mesures respectent la décomposition

$$Z_{G_v}(X) \setminus G_v = M_v \setminus G_v \times Z_{M_v}(X) \setminus M_v;$$

- Pour tout $g \in G_v$, les mesures sur $Z_{G_v}\big((\mathrm{Ad}\, g)X\big) \setminus G_v$ et $Z_{G_v}(X) \setminus G_v$ se correspondent par l'isomorphisme induit par la conjugaison par g^{-1} ;
- Pour tout $Y \in \mathfrak{g}_v$ central, la mesure sur $Z_{G_v}(X)$ est égale à la mesure sur $Z_{G_v}(X+Y)$.

Ces choix sont loisibles et sont ceux effectués plus ou moins explicitement dans [6].

On rappelle que pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, l'intégrale

$$\int_{Z_{G_v}(X)\setminus G_v} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, dx$$

est convergente (*cf.* [12]).

Soit T un tore. Si T est déployé, on munit T_v de la mesure de Haar pour laquelle le sous-groupe compact maximal de T est de mesure 1. Si T est quelconque, on munit T_v de la mesure pour laquelle $T_v/A_{T,v}$ est de mesure 1. Ces mesures sont compatibles avec les conditions précédentes.

Pour tout $P \in \mathcal{F}(M_0)$, on fixe une mesure de Haar sur $\mathfrak{n}_{P,v}$ de sorte que pour $X \in \mathfrak{m}_{P,v} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$ on ait

$$|D^{\mathfrak{g}}(X)|_v^{1/2} \int_{N_{P,v}} f\big((\mathrm{Ad}\, n^{-1})X\big)\, dn = |D^{\mathfrak{m}_P}(X)|_v^{1/2} \int_{\mathfrak{n}_{P,v}} f(X+U)\, dU.$$

C'est loisible (*cf. e.g.* le changement de variable de [16] III.3(d)).

1.2 Rappel de quelques propriétés des (G, M)-familles

1.2.1

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. On note $a^*_{M,\mathbb{C}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $a^*_M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et ia^*_M son sous-$\mathbb{R}$-espace évident. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$, on définit une fonction θ_P sur ia^*_M par

$$\forall \lambda \in ia^*_M \quad \theta_P(\lambda) = \mathrm{vol}\left(a^G_M/\mathbb{Z}(\Delta^\vee_P)\right)^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \lambda(\alpha^\vee).$$

Si $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ est une (G, M)-famille (*cf.* [2] p. 36), on note c_M la valeur en 0 de la fonction C^∞ sur ia^*_M (*cf.* le lemme 6.2 de [2])

$$c_M(\lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} c_P(\lambda)\theta_P(\lambda)^{-1}.$$

1.2.2

Soit $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille. Pour tout $L\in\mathcal{L}(M)$, on peut définir une (G,L)-famille $(c_{L,P})_{P\in\mathcal{P}(L)}$ par
$$\forall\lambda\in ia_L^*\quad c_{L,P}(\lambda)=c_{P'}(\lambda)$$
où P' est un élément de $\mathcal{P}(M)$ qui vérifie $P'\subset P$. Si l'on fixe de plus un élément $Q\in\mathcal{P}(L)$, on définit une (L,M) famille $(c_P^Q)_{P\in\mathcal{P}^L(M)}$ par
$$\forall\lambda\in ia_M^*\quad c_P^Q(\lambda)=c_{P'}(\lambda)$$
où P' est l'unique élément de $\mathcal{P}(M)$ qui vérifie $P'\cap L=P$ et $P'\subset Q$.

1.2.3

Soit $(c_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ une (G,M)-famille. Pour tout élément $Q\in\mathcal{F}(M)$, il existe un nombre complexe c'_Q de sorte que pour toute (G,M)-famille $(d_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$, le produit s'écrive
$$(c\cdot d)_M=\sum_{Q\in\mathcal{F}(M)}c'_Qd_M^Q.$$
Si, de plus, il existe pour tout $L\in\mathcal{L}(M)$ un nombre complexe d_M^L tel que, pour tout $Q\in\mathcal{P}(L)$, $d_M^Q=d_M^L$ alors
$$(c\cdot d)_M=\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}d_M^Lc_L.$$
Ce sont les corollaires 6.3 et 6.5 de [2].

1.2.4

Les deux exemples suivants de (G,M)-famille interviendront par la suite. Définissons tout d'abord, pour tout $x\in G_v$, une (G,M)-famille $\big(v_P(x)\big)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ par
$$v_P(\lambda,x)=e^{-\lambda(H_P(x))}$$
pour tous $\lambda\in ia_M^*$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. Pour tout $L\in\mathcal{L}(M)$, on définit une (L,M)-famille $\big(v_P^L(x)\big)_{P\in\mathcal{P}^L(M)}$ comme l'analogue sur le groupe L de la (G,M)-famille précédente.

Le second exemple est construit ainsi : pour tout $\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(G,A_M)$, on fixe une fonction r_β sur $\mathbb{C}$, analytique dans un voisinage de $i\mathbb{R}$, telle que $r_\beta(0)=1$ et on pose
$$r_P(\lambda)=\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)}r_\beta\big(\lambda(\beta^\vee)\big)$$
pour tous $\lambda\in ia_M^*$ et $P\in\mathcal{P}(M)$. On obtient alors une (G,M)-famille $(r_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ qu'on conviendra de qualifier de *spéciale* (*cf.* le paragraphe 7 de [3]).

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. On dispose de plusieurs (L, M)-familles : la famille $(r_P^L)_{P \in \mathcal{P}^L(M)}$ qui est l'analogue de la famille précédente sur le groupe L et, pour tout $Q \in \mathcal{P}(L)$, la famille $(r_P^Q)_{P \in \mathcal{P}^L(M)}$. Ces familles ne sont pas identiques mais elles vérifient

$$\forall Q \in \mathcal{P}(L) \quad r_M^Q = r_M^L.$$

La démonstration est mot pour mot celle du lemme 5.1 de [6]. En particulier, on en déduit que pour toute (G, M)-famille $(c_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$,

$$(c.r)_M = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r_M^L c_L.$$

1.2.5

Dans le paragraphe 7 de [5], Arthur définit une application

$$d_M^G \colon \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \to [0, +\infty[$$

telle que pour tout $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M)$

- $d_M^G(M, G) = d_M^G(G, M) = 1$;
- $d_M^G(L_1, L_2) = d_M^G(L_2, L_1)$;
- $d_M^G(L_1, L_2) \neq 0$ si et seulement si $\mathfrak{a}_M^G = \mathfrak{a}_M^{L_1} \oplus \mathfrak{a}_M^{L_2}$.

Moyennant certains choix, on peut également montrer qu'il existe une application (*cf.* [16] II.4)

$$s \colon \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \to \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M)$$

de sorte que

- pour tout $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M)$, $s(L_1, L_2) \in \mathcal{P}(L_1) \times \mathcal{P}(L_2)$;
- pour toute (G, M)-famille $(c_P)_{P \in \mathcal{P}(M)}$

$$c_L = \sum_{L' \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L') c_M^{Q'}$$

  où Q' est la seconde composante de $s(L, L')$.

La dernière égalité provient de la proposition 7.1 de [5].

1.3 Intégrales orbitales pondérées

1.3.1

On commence par rappeler le lemme suivant.

Lemme 1.1 *Soit X un élément semi-simple de $\mathfrak{g}_v$. On peut trouver un voisinage invariant $\mathcal{V}_X$ de 0 dans $\mathfrak{g}_{X,v}$ qui vérifie la propriété suivante. Pour toute partie compacte Ω de $\mathfrak{g}_v$, il existe une partie compacte Σ de $Z_G(X)_v \backslash G_v$ telle que*

$$(\mathrm{Ad}\, y^{-1})(X + \mathcal{V}_X) \cap \Omega = \varnothing$$

pour tout $y \in Z_G(X)_v \backslash G_v$ qui n'appartient pas à Σ.

Ce lemme se déduit facilement du lemme 2.1 de [6] à l'aide d'une application exponentielle (voir aussi le lemme 25 de [10]).

1.3.2

Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$. On commence par définir les intégrales orbitales pondérées $J_M^G(X,\cdot)$ pour $X \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_{G_v}(X) = Z_{M_v}(X)$. Ce sont des distributions définies par

$$J_M^G(X,f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|_v^{1/2} \int_{M_v\backslash G_v} \int_{Z_{M_v}(X)\backslash M_v} f\big((\operatorname{Ad} x^{-1})(\operatorname{Ad} m^{-1})X\big)\, v_M(x)\, dm\, dx$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$. Waldspurger a montré dans [16], paragraphe III.1 que cette intégrale converge. En fait, il déduit la convergence de cette intégrale de la convergence des intégrales orbitales pondérées sur les groupes (*cf.* [6] p. 223) à l'aide d'une application exponentielle. On peut la montrer directement. Tout d'abord, l'intégrale sur m converge (*cf.* le paragraphe 1.1.9.9). Notons ensuite X_s et X_n les parties semi-simple et nilpotente de X ; quitte à conjuguer X par un élément de $Z_{M_v}(X_s)$, on peut supposer que X_n appartient au voisinage $\mathcal{V}_{X_s} \subset \mathfrak{g}_{X_s,v}$ du lemme précédent. On peut montrer ensuite que les inclusions $Z_{G_v}(X) \subset M_v$ et $Z_{G_v}(X_s) \subset M_v$ sont équivalentes. Il est alors clair que l'intégrale sur x peut être prise sur un compact.

Définir les intégrales orbitales pour un élément $X \in \mathfrak{m}_v$ quelconque est un peu plus délicat. Pour tout A dans un certain ouvert de $\mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg},v}$, on a

$$Z_{G_v}(X+A) = Z_{M_v}(X+A).$$

Remarquons que si X est nilpotent, l'ouvert en question est $\mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg},v}$. Les distributions $J_L^G(X+A,\cdot)$ sont donc bien définies pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et l'on pose, pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$

$$J_M^G(X,f) = \lim_{A\to 0} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_M^L(\exp X_n, \exp A)\, J_L^G(X+A,f)$$

où la limite est prise sur A dans l'ouvert précédent, X_n est la composante nilpotente de X et r_M^L est une fonction introduite par Arthur dans [6] Section 5. Waldspurger déduit l'existence de la limite de résultats d'Arthur à l'aide d'une application exponentielle (*cf.* [16] III.2).

2 Construction de coefficients

Rappelons que les groupes considérés, sauf mention explicite du contraire, sont supposés définis sur F_v. On note, sauf indication contraire, exp l'application exponentielle associée à tout groupe unipotent. Fixons dans la suite un sous-groupe de Lévi M de G. A la fin de cette partie, pour u un élément unipotent régulier de M_v et une racine $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G,A_M)$, nous calculons le coefficient $\rho(\beta,u)$ introduit par Arthur dans [6] Section 3. Dans cette partie, on autorisera F_v à être le corps des réels ou des complexes.

2.1 Un lemme élémentaire

Lemme 2.1 *Fixons un sous-groupe unipotent N normalisé par M et contenu dans le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. On note $\mathfrak{m}'$ l'ouvert de $\mathfrak{m}$ formé des Y qui vérifient*

$$\det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{n}) \neq 0$$

Pour tous $Y \in \mathfrak{m}'$ et $V \in \mathfrak{n}$ il existe un unique $n \in N$ de sorte que

$$(\operatorname{Ad} n^{-1})(Y) = Y + V. \tag{2.1}$$

Soit U l'unique élément de $\mathfrak{n}$ qui vérifie $n = \exp(U)$. Il existe alors un polynôme Q sur $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$, défini sur F_v et un entier $h \in \mathbb{N}$ de sorte que l'application

$$(Y, V) \mapsto U$$

coïncide sur $\mathfrak{m}' \times \mathfrak{n}$ avec l'application

$$(Y, V) \mapsto \det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{n})^{-h} Q(Y, V).$$

Remarque on aura en tête les cas particuliers suivants :

- $Y = A + \Pi$ où $A \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg}}$ et $\Pi \in \mathcal{N}_M$ (dans ce cas $\det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{n}) = \det(\operatorname{ad} A|\mathfrak{n})$) ;
- On fixe un sous-tore maximal T de M. On choisit une extension finie F' de F_v, qui déploye le tore T et un sous-groupe de Borel B (défini sur F') qui contient T. On considère $Y = X + V_1$ avec $X \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et $V_1 \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}_B$. Notons que $\det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{n}) = \det(\operatorname{ad} X|\mathfrak{n})$.

Preuve On peut trouver une suite finie d'idéaux de $\mathfrak{n}$

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \supset \mathfrak{n}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}_k = \{0\}$$

tels que :

- $\forall i \; [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_{i+1}$;
- $\forall i \; [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_i$;
- $\forall i$, on puisse fixer un supplémentaire $\mathfrak{n}'_i$ de $\mathfrak{n}_{i+1}$ dans $\mathfrak{n}_i$ stable par $\operatorname{ad} \mathfrak{m}$.

En effet, il suffit de décomposer $\mathfrak{n}$ en espaces propres sous l'action de $\operatorname{ad} \mathfrak{a}_M$ et de prendre pour premier idéal non nul l'espace propre associé à un poids maximal de $\mathfrak{a}_M$ dans $\mathfrak{n}$. On considère ensuite l'action de $\operatorname{ad} \mathfrak{a}_M$ sur le quotient de $\mathfrak{n}$ par cet idéal. On en déduit la suite annoncée à l'aide d'une récurrence.

Soit $U \in \mathfrak{n}$ tel que $n = \exp(U)$. L'équation (2.1) devient

$$\big(\operatorname{Ad} \exp(-U)\big)(Y) = Y + V,$$

i.e.

$$\exp(-\operatorname{ad} U)(Y) = Y - [U, Y] + \frac{\big[U, [U, Y]\big]}{2!} + \cdots = Y + V.$$

Notons pr_i la projection sur $\mathfrak{n}'_i$ relativement à la décomposition $\mathfrak{n} = \oplus \mathfrak{n}'_i$. On pose $U_i = \mathrm{pr}_i(U)$ et $V_i = \mathrm{pr}_i(V)$. On a alors les relations

$$\mathrm{ad}(Y)(U_1) = V_1,$$

$$\mathrm{ad}(Y)(U_2) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{pr}_2\big(\,[U_1, [U_1, Y]]\,\big) = V_2,$$

$$\dots$$

De la première ligne, on déduit que U_1 est un polynôme en (Y, V_1) multiplié par l'inverse de $\det\big(\mathrm{ad}(Y)|\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_2\big)$, puis de la deuxième que U_2 est un polynôme en (Y, V_1, V_2) multiplié par une puissance négative de $\det\big(\mathrm{ad}(Y)|\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_3\big)$. Par récurrence, U_i est un polynôme en $(X, V_1, \dots, V_i)$ multiplié par une puissance négative de $\det\big(\mathrm{ad}(Y)|\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{i+1}\big)$ ce qui donne le résultat annoncé. ■

2.2 Liens avec les représentations

Définissons $\mathcal{W}(a_M)$ comme l'ensemble des éléments de a_M^* qui sont des poids extrémaux de représentations de G de dimension finie, F_v-rationnelles et absolument irréductibles. Il est bien connu que $\mathcal{W}(a_M)$ est un sous-groupe d'indice fini de $X(A_M)$ et un réseau de a_M^*.

Pour chaque $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$, on fixe les objets suivants :

- Λ_ω une représentation irréductible de G F_v-rationnelle sur le F_v-espace V_ω ;
- $\phi_\omega \in V_\omega(F_v)$ vecteur de poids extrémal ω ;
- une hauteur $\|\cdot\|_v$ sur $V_\omega(F_v)$ invariante par K_v et pour laquelle ϕ_ω est de norme 1.

L'intérêt de considérer $\mathcal{W}(a_M)$ provient du fait suivant (*cf.* [6] (3.3)) : si $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$ est P-dominant, *i.e.* si ω est positif sur la chambre de a_M associée à P, alors pour tout $x \in G_v$,

$$v_P(\omega, x) = \|\Lambda_\omega(x^{-1})\phi_\omega\|_v.$$

2.3 Cas déployé

Fixons un sous-tore maximal T de M. On fixe une extension F' finie de F_v qui déploie T. Pour tout α dans l'ensemble $\Sigma(G, T)$ des racines de T dans G, on note $\mathfrak{n}_\alpha$ le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ sous l'action de $\mathrm{Ad}\, T$ pour le caractère α. On considère alors N_α l'unique sous-groupe unipotent de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_\alpha$.

Fixons un élément $\alpha \in \Sigma(G, T)$. D'après le lemme précédent, appliqué au corps F', au sous-groupe de Lévi F'-rationnel minimal T et au sous-groupe unipotent $N_{-\alpha}$, on a une application de $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{n}_{-\alpha}$ dans $N_{-\alpha}$ qui à (X, V) associe l'unique $n \in N_{-\alpha}$ tel que

$$(\mathrm{Ad}\, n^{-1})(X) = X + V. \tag{2.2}$$

Notons $X(T)$ le groupe des caractères du tore T. On considère l'espace vectoriel réel $a_T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X(T), \mathbb{R}\big)$. On a une injection naturelle de a_M dans a_T. On fixe sur a_T

un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl $W(G,T)$ de T dans G, qui induit sur a_M le produit scalaire déjà choisi. On a alors une injection naturelle de a_M^* dans a_T^*. L'ensemble $\Sigma(G,T)$ est canoniquement inclus dans a_T^*. A l'élément α, on associe sa coracine $\alpha^\vee \in a_T$. Fixons $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$ tel que $\omega(\alpha^\vee) \geqslant 0$. Sous ces hypothèses, on a le lemme suivant :

Lemme 2.2 *L'application*

$$(X,V) \mapsto \alpha(X)^{\omega(\alpha^\vee)} \Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega \tag{2.3}$$

est la restriction à $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{n}_{-\alpha}$ *d'un polynôme sur* $\mathfrak{t} \times \mathfrak{n}_{-\alpha}$ *non nul en* $X = 0$.

Preuve Fixons des éléments $H_\alpha \in \mathfrak{t}$, $Y_\alpha \in \mathfrak{n}_\alpha$ et $Y_{-\alpha} \in \mathfrak{n}_{-\alpha}$ de sorte que

$$\begin{cases} \alpha(H_\alpha) = 2\,; \\ [Y_\alpha, Y_{-\alpha}] = H_\alpha. \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ engendrée par ces trois éléments est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$. La restriction de la différentielle de Λ_ω à $\mathfrak{l}$ est une représentation de $\mathfrak{l}$ que l'on note encore Λ_ω. On a les relations

$$\begin{cases} \Lambda_\omega(H_\alpha)\phi_\omega = \omega(H_\alpha)\phi_\omega\,; \\ \Lambda_\omega(Y_\alpha)\phi_\omega = 0\,; \\ \forall V \in \mathfrak{n}_{-\alpha} \quad \Lambda_\omega\big(\exp(V)\big) = \exp\big(\Lambda_\omega(V)\big). \end{cases}$$

Posons $k = \omega(H_\alpha)$. A l'aide de la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2$, on voit que $k \in \mathbb{N}$ et que Λ_ω induit une représentation de $\mathfrak{l}$ sur $\Lambda_\omega(\mathfrak{l})\phi_\omega$, irréductible de dimension $k+1$. On en déduit que

$$[\Lambda_\omega(Y_{-\alpha})]^k\phi_\omega \neq 0 \quad \text{et} \quad [\Lambda_\omega(Y_{-\alpha})]^{k+1}\phi_\omega = 0, \tag{2.4}$$

relations qui sont également vraies pour tout élément non nul de $\mathfrak{n}_{-\alpha}$.

Supposons que le triplet $(X,V,n) \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{n}_{-\alpha} \times N_{-\alpha}$ vérifie l'équation (2.2). Soit $U \in \mathfrak{n}_{-\alpha}$ tel que $n = \exp(U)$. Dans ce cas, l'équation (2.2) s'écrit

$$-[U,X] = V$$

i.e.

$$U = \frac{V}{\alpha(X)}$$

Ainsi, on obtient que

$$\Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega = \exp\big(-\Lambda_\omega(U)\big)\,\phi_\omega = \phi_\omega - \frac{\Lambda_\omega(V)}{\alpha(X)}\phi_\omega + \cdots + (-1)^k \frac{\big(\Lambda_\omega(V)\big)^k}{k!\,\alpha(X)^k}\phi_\omega$$

En notant que $k = \omega(H_\alpha) = \omega(\alpha^\vee)$, on en déduit facilement le résultat annoncé. ■

Notons encore $|\cdot|_v$ la valeur absolue sur F' qui prolonge celle de F_v. Fixons une norme, toujours notée $\|\cdot\|_v$ sur $V_\omega(F')$ qui prolonge celle sur $V_\omega(F_v)$. Soient $x \in T(F')$ fortement régulier et $u \in N_{-\alpha}(F')$. Arthur dans l'article [6] Section 3 montre l'existence d'un réel qu'il note $\rho(\alpha, 1)$ tel que la limite

$$\lim_{x \to 1} |\alpha(x) - \alpha(x^{-1})|_v^{\rho(\alpha,1)\omega(\alpha^\vee)} \|\Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega\|_v$$

existe et n'est pas identiquement nulle comme fonction de u ; on a noté n l'élément de $N_{-\alpha}(F')$ défini par l'équation

$$n^{-1}xn = xu. \tag{2.5}$$

Corollaire 2.3 *On a l'égalité* $\rho(\alpha, 1) = 1$.

Preuve Arthur remarque qu'au voisinage de $x = 1$, $\Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega$ est une série de Laurent en $\bigl(\alpha(x) - \alpha(x^{-1})\bigr)$ dont les coefficients sont des morphismes de $N_{-\alpha}$ dans V_ω. Il nous suffit donc de montrer que

$$\bigl(\alpha(x) - \alpha(x^{-1})\bigr)^{\omega(\alpha^\vee)} \Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega \tag{2.6}$$

a une limite non nulle quand x tend vers 1 pour u dans une partie de $N_{-\alpha}(F')$ Zariski-dense dans $N_{-\alpha}$.

Fixons une application exponentielle notée exp d'un voisinage $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}}$ de 0 dans $\mathfrak{g}(F')$ sur un voisinage $\mathcal{V}_G$ de 1 dans $G(F')$—ces voisinages sont supposés ouverts et invariants par l'action adjointe de $G(F')$—. On note log l'homéomorphisme inverse de exp. Supposons que x, n et u, choisis comme précédemment, —en particulier ils vérifient l'égalité (2.5)—appartiennent à $\mathcal{V}_G$. Il existe alors $X \in \mathcal{V}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et $U \in \mathcal{V}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{n}_{-\alpha}$ tels que $x = \exp(X)$ et $u = \exp(U)$.

Notons Q le polynôme sur $\mathfrak{t} \times \mathfrak{n}_{-\alpha}$ dont la restriction à $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{n}_{-\alpha}$ coïncide avec l'application (2.3). On a l'équivalent suivant

$$\bigl(\alpha(x) - \alpha(x^{-1})\bigr) \sim_{x \to 1} 2\alpha(\log x).$$

On en déduit que

$$\bigl(\alpha(x) - \alpha(x^{-1})\bigr)^{\omega(\alpha^\vee)} \Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega \sim_{x\to 1} 2^{\omega(\alpha^\vee)} Q\Bigl(X, \log\bigl(\exp(X)\exp(U)\bigr) - X\Bigr).$$

Par conséquent l'expression (2.6) a une limite égale à $Q(0, U)$ donc non nulle pour U dans une partie de $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}}$ Zariski-dense dans $\mathfrak{n}_{-\alpha}$, donc non nulle pour u dans une partie de $\mathcal{V}_G$ Zariski-dense dans $N_{-\alpha}$. ■

Lemme 2.4 *Soit B_1 et B deux sous-groupes de Borel de G définis sur F' qui contiennent T. On note $\Sigma(B,T)$ l'ensemble des racines de T dans B et $\overline{B_1}$ le sous-groupe de Borel opposé à B_1 et contenant T. On note U_1 le radical unipotent de B_1 et $\mathfrak{u}_1$ son algèbre de Lie. Pour tout $X \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et tout $V_1 \in \mathfrak{u}_1$, on définit n_1 comme l'unique élément de U_1 qui vérifie*

$$\big(\mathrm{Ad}(n_1)^{-1}\big)(X) = X + V_1. \tag{2.7}$$

Fixons un poids $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$ B-dominant. Alors l'application ψ définie sur $(\mathfrak{t}\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}})\times\mathfrak{u}_1$ par

$$(X, V_1) \mapsto \prod_{\alpha\in\Sigma(B,T)\cap\Sigma(\overline{B_1},T)} [\alpha(X)^{\omega(\alpha^\vee)}]\Lambda_\omega(n_1^{-1})\phi_\omega \tag{2.8}$$

est la restriction à $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{u}_1$ d'un polynôme sur $\mathfrak{t} \times \mathfrak{u}_1$ non nul en $X = 0$.

Preuve En utilisant le lemme 2.1, on voit que l'application (2.8) est la restriction à $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}) \times \mathfrak{u}_1$ d'un polynôme en (X, V_1) multiplié par une puissance négative de $\det(\mathrm{ad}\, X|\mathfrak{u}_1)$. Il nous suffit alors de montrer qu'elle admet dans $V_\omega(F')$ une limite non nulle quand $X \in \mathfrak{t}(F') \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tend vers 0 et V_1 appartient à une partie de $\mathfrak{u}_1(F')$ Zariski-dense dans $\mathfrak{u}_1$. Reprenons les notations de la preuve du corollaire 2.3. On dispose en particulier d'une application exponentielle $\exp\colon \mathcal{V}_\mathfrak{g} \to \mathcal{V}_G$. Supposons que X et $X+V_1$ appartiennent à $\mathcal{V}_\mathfrak{g}$. Notons $x = \exp(X)$ et $u_1 = \exp(-X)\exp(X+V_1)$. Si X, V_1 et $n_1 \in U_1(F')$ vérifient l'égalité (2.7), x, u_1 et n_1 vérifient l'égalité (2.5). On en déduit que $\psi(X, V_1)$ est équivalente quand X tend vers 0 à une puissance de 2 près à

$$\prod_{\alpha\in\Sigma(B,T)\cap\Sigma(\overline{B_1},T)} \Big[\big(\alpha(x) - \alpha(x^{-1})\big)^{\omega(\alpha^\vee)}\Big]\Lambda_\omega(n_1^{-1})\phi_\omega \tag{2.9}$$

En utilisant le corollaire 2.3 et le corollaire 4.3 de [6], on voit qu'il existe un morphisme q de $\mathfrak{t} \times \mathfrak{u}_1$ dans V_ω tel que l'expression (2.9) soit égale à $q(x, u_1)$ et que $q(x, \cdot)$ soit non identiquement nul en $x = 1$. La limite en $(0, V_1)$ de l'application ψ est donc $q\big(1, \exp(V_1)\big)$ (à une puissance de 2 près). On conclut alors facilement. ■

2.4 Cas général

Fixons un sous-tore maximal T de M. On reprend les notations de la partie 2.3. Pour tout $\beta \in \Sigma(G, A_M)$, on définit l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_\beta$ comme le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ pour le caractère β sous l'action de $\mathrm{Ad}\, A_M$. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}_\beta$ est stable sous l'action par adjonction de T. On obtient alors une décomposition

$$\mathfrak{g}_\beta = \oplus\mathfrak{n}_\alpha,$$

où la somme est prise sur l'ensemble S_β formé des éléments $\alpha \in \Sigma(G, T)$ qui induisent le caractère β sur A_M. En particulier, S_β est inclus dans une unique composante irréductible du système de racines associé au groupe G et au tore T. Identifions

a_T et a_T^* à l'aide du produit scalaire sur a_T. Pour tout $\alpha \in S_\beta$, la projection de $\alpha^\vee$ sur a_M est

$$2\|\alpha\|^{-2}\beta.$$

On sait bien que $\|\alpha\|^2$ prend au plus deux valeurs. Notons S_β^+, resp. S_β^-, les éléments de S_β de plus grande norme, resp. de norme strictement plus petite que la norme des éléments de S_β^+. Notons que S_β^- peut être vide. Si ce n'est pas le cas, on note l_β le rapport des carrés des normes : c'est un entier qui vaut 2 ou 3. Définissons un réel k_β de sorte que pour tout $\alpha \in S_\beta^+$, la projection de $\alpha^\vee$ sur a_M soit $k_\beta\beta^\vee$ si β est non divisible et $k_\beta(\beta/2)^\vee$ sinon. On définit une application polynomiale Φ_β sur $\mathfrak{t}$ par

$$\Phi_\beta(X) = \prod_{\alpha\in S_\beta^+} \alpha(X) \prod_{\alpha\in S_\beta^-} \alpha(X)^{l_\beta}.$$

Cette application est invariante par le groupe de Weyl $W(M,T)$. Par conséquent, d'après un théorème de Chevalley (*cf. e.g.* [15] théorème 4.9.2.), c'est la restriction à $\mathfrak{t}$ d'une application polynomiale sur $\mathfrak{m}$ invariante par $\operatorname{Ad} M$, que l'on note encore Φ_β. On vérifie que le polynôme Φ_β ne dépend pas du choix du tore T et qu'il est défini sur F_v.

Pour tous $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$, $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$ tel que $\omega(\beta^\vee) \geqslant 0$, et $Y \in \mathfrak{m}$, on définit alors

$$R_\beta(\omega, Y) = \Phi_\beta(Y)^{k_\beta\omega(\beta^\vee)}\Phi_{2\beta}(Y)^{k_{2\beta}\omega(\beta^\vee)}.$$

On notera que $k_\beta\omega(\beta^\vee)$ et $k_{2\beta}\omega(\beta^\vee)$ sont des entiers. Ainsi $Y \mapsto R_\beta(\omega, Y)$ est une application polynomiale définie sur F_v.

Lemme 2.5 *Soient P et $P_1 \in \mathcal{P}(M)$ et $\omega \in \mathcal{W}(a_M)$ P-dominant. Pour tout $A \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg}}$, $\Pi \in \mathcal{N}_M$ et $V \in \mathfrak{n}_1$, notons n_1 l'unique élément de $N_1 = N_{P_1}$ tel que*

$$(\operatorname{Ad} n_1^{-1})(A + \Pi) = A + \Pi + V_1. \tag{2.10}$$

L'application définie sur $\mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg}} \times \mathcal{N}_M \times \mathfrak{n}_1$ par

$$(A, \Pi, V_1) \mapsto \Big[\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)\cap\Sigma^{\mathrm{nd}}(\overline{P_1},A_M)} R_\beta(\omega, A)\Big]\,\Lambda_\omega(n_1^{-1})\phi_\omega \tag{2.11}$$

est la restriction à $\mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg}} \times \mathcal{N}_M \times \mathfrak{n}_1$ d'un morphisme sur $\mathfrak{a}_M \times \mathcal{N}_M \times \mathfrak{n}_1$ défini sur F_v, qui, en $A = 0$, est non identiquement nul sur $\mathcal{N}_{M,\mathrm{reg}} \times \mathfrak{n}_1$.

Preuve A l'aide du lemme 2.1, on voit qu'il existe un polynôme Q sur $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}_1$ défini sur F_v et un entier $h \in \mathbb{N}$ de sorte que si $Y \in \mathfrak{m}'$, $V_1 \in \mathfrak{n}_1$ et $n_1 \in N_1$ vérifient l'égalité

$$(\operatorname{Ad} n_1^{-1})(Y) = Y + V_1,$$

l'application

$$(Y, V_1) \mapsto \Big[\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)\cap\Sigma^{\mathrm{nd}}(\overline{P_1},A_M)} R_\beta(\omega, Y)\Big]\,\Lambda_\omega(n_1^{-1})\phi_\omega \tag{2.12}$$

coïncide sur son ensemble de définition avec la fraction rationnelle

$$S(Y,V_1)=\det(\operatorname{ad}Y|\mathfrak{n}_1)^{-h}Q(Y,V_1). \tag{2.13}$$

Remarquons que, pour $Y = A + \Pi$ avec $A \in A_{M,\mathrm{reg}}$ et $\Pi \in \mathcal{N}_M$, on retrouve l'application (2.11). En effet, pour tout $\beta \in \Sigma(G, A_M)$, $\Phi_\beta(A+\Pi) = \Phi_\beta(A)$: c'est une conséquence du fait que Φ_β est une fonction polynomiale M-invariante. Notons également que $\det\big(\operatorname{ad}(A+\Pi)|\mathfrak{n}_1\big) = \det(\operatorname{ad}A|\mathfrak{n}_1)$. Ainsi l'application (2.11) est polynomiale en Π et V_1. Montrons donc que pour tout Π et V_1, la fraction rationnelle $S(A+\Pi, V_1)$ est un polynôme en A.

Pour cela, fixons un sous-groupe de Borel B^M de M. On en déduit les sous-groupes de Borel $B = B^M \cdot N$ et $B_1 = B^M \cdot N_1$. On aimerait relier l'application ψ du lemme 2.4 à la fraction rationnelle S. A cette fin, donnons-nous pour tous $X \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et $V \in \mathfrak{u}_1$, un élément $n \in U_1$ qui vérifie

$$(\operatorname{Ad} n^{-1})(X) = X + V.$$

Tout d'abord,

$$\prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)\cap\Sigma^{\mathrm{nd}}(\overline{P_1},A_M)} R_\beta(\omega,X)=\prod_{\alpha\in\Sigma(B,T)\cap\Sigma(\overline{B_1},T)}\alpha(X)^{\omega(\alpha^\vee)} \tag{2.14}$$

En effet, soit $\alpha \in \Sigma(B,T)\cap\Sigma(\overline{B_1},T)$. Si la restriction de α à A_M est nulle, $\omega(\alpha^\vee) = 0$. Sinon il existe $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M) \cap \Sigma^{\mathrm{nd}}(\overline{P_1},A_M)$ tel que la restriction de α à A_M égale β ou 2β. Supposons que nous soyons dans le premier cas. Si $\alpha \in S_\beta^+$, resp. S_β^-, $\omega(\alpha^\vee) = k_\beta\omega(\beta^\vee)$, resp. $l_\beta k_\beta \omega(\beta^\vee)$. On a une discussion semblable dans le second cas.

Ecrivons ensuite $n = n^1 n_1$ et $V = V^1 + V_1$ suivant les décompositions $U_1 = (U_1\cap M)N_1$ et $\mathfrak{u}_1 = (\mathfrak{u}_1\cap\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{n}_1$. Ainsi

$$(\operatorname{Ad} n_1^{-1})\big((\operatorname{Ad}(n^1)^{-1})X\big) = (\operatorname{Ad} n_1^{-1})\big[\big(\operatorname{Ad}(n^1)^{-1}\big)X - X\big] + (\operatorname{Ad} n_1^{-1})X.$$

Remarquons que $\big(\operatorname{Ad}(n^1)^{-1}\big)X - X$ appartient à $\mathfrak{u}_1\cap\mathfrak{m}$ et donc que le premier terme du membre de droite de l'égalité précédente appartient à l'espace affine $\big(\operatorname{Ad}(n^1)^{-1}\big)X - X + \mathfrak{n}_1$. Le second terme, quant à lui, appartient à $X+\mathfrak{n}_1$. On en déduit que $V^1 = \big(\operatorname{Ad}(n^1)^{-1}\big)X - X$ puis que

$$(\operatorname{Ad} n_1^{-1})(X+V^1) = X + V^1 + V_1. \tag{2.15}$$

D'autre part,

$$\Lambda_\omega(n^{-1})\phi_\omega = \Lambda_\omega(n_1^{-1})\phi_\omega. \tag{2.16}$$

Cette égalité provient du fait que tout élément unipotent de M agit trivialement sur ϕ_ω.

A l'aide des égalités (2.14) et (2.16), on voit que

$$\psi(X, V_1 + V^1) = S(X + V^1, V_1).$$

On en déduit que l'application obtenue par restriction à $(A, \Pi, V_1) \in a_{M,\mathrm{reg}} \times (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{u}_1) \times \mathfrak{n}_1$ de l'application (2.11) est donnée par

$$S(A + \Pi, V_1) = \psi(A, \Pi + V_1).$$

En particulier, cette application est polynomiale en A et en $A = 0$ non identiquement nulle sur $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{u}_1) \times \mathfrak{n}_1$. On en conclut que l'application (2.11) est polynomiale car pour tout $\Pi \in \mathcal{N}_M$, il existe un sous-groupe de Borel B^M de M tel que $\Pi \in \mathfrak{b}^M$. De plus, $(\Pi, V_1) \mapsto S(\Pi, V_1)$ est non identiquement nulle sur $\mathcal{N}_M \times \mathfrak{n}_1$ donc sur $\mathcal{N}_{M,\mathrm{reg}} \times \mathfrak{n}_1$. On vient d'utiliser le fait que $\mathcal{N}_{M,\mathrm{reg}}$ est Zariski-dense dans $\mathcal{N}_M$. ■

Corollaire 2.6 *Soit $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$ et u un élément de M unipotent régulier. Arthur a introduit, dans [6] Section 3, le coefficient $\rho(\beta, u)$. On a l'égalité $\rho(\beta, u) = \rho(\beta)$ où $\rho(\beta)$ est défini par*

$$\rho(\beta) = k_\beta(|S_\beta^+| + l_\beta|S_\beta^-|) + k_{2\beta}(|S_{2\beta}^+| + l_{2\beta}|S_{2\beta}^-|).$$

Preuve Arthur a montré que $\rho(\beta, u)$ ne dépend que de la classe de conjugaison géométrique de u et il n'y a qu'une seule classe de conjugaison géométrique d'éléments unipotents réguliers (*cf.* [9] III.1.8). Il nous suffit de calculer $\rho(\beta, u)$ pour un seul élément unipotent régulier de M. On procède alors comme dans la preuve du corollaire 2.3 en utilisant une application exponentielle et le lemme 2.5. ■

3 De nouvelles intégrales orbitales pondérées

3.1 Définitions

Fixons $M \in \mathcal{L}(M_0)$ un sous-groupe de Lévi de G. Soit $Y \in \mathfrak{m}_\nu$ tel que $Z_M(Y) = Z_G(Y)$. On définit pour tout $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$ et tout $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$ le coefficient

$$r_\beta(\lambda, Y) = \left[|\Phi_\beta(Y)|_\nu^{k_\beta} |\Phi_{2\beta}(Y)|_\nu^{k_{2\beta}} \right]^{\lambda(\beta^\vee)}.$$

D'après les rappels du paragraphe 1.2.4, on dispose alors de la (G, M)-famille spéciale $\left(r_P(Y)\right)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ définie par

$$r_P(\lambda, Y) = \prod_{\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(P, A_M)} r_\beta\Big(\frac{\lambda}{2}, Y\Big)$$

pour tout $\lambda \in i\, a_M^*$ et tout $P \in \mathcal{P}(M)$. On définit la distribution $J_M^{G,b}(Y, \cdot)$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_\nu)$ par

$$J_M^{G,b}(Y, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r_M^L(Y) J_L^G(Y, f)$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$. C'est une combinaison linéaire des distributions $J_L^G(Y,\cdot)$ pour $L \in \mathcal{L}(M)$. On dispose également des distributions analogues $J_M^{L,b}(Y,\cdot)$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{l}_v)$, où G est remplacé par un groupe réductif $L \in \mathcal{L}(M)$.

Remarque Notons $w_P(\lambda, Y, x)$ le produit des deux (G,M)-familles $r_P(\lambda, Y)$ et $v_P(\lambda, x)$. En utilisant l'expression d'un produit de (G,M)-familles, on obtient l'expression de la distribution $J_M^{G,b}(Y,\cdot)$ sous forme d'intégrale orbitale pondérée :

$$J_M^{G,b}(Y,f) = |D^{\mathfrak{g}}(Y)|_v^{1/2} \int_{Z_{M_v}(Y)\backslash G_v} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(Y)\big)\, w_M(Y,x)\, dx.$$

Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$, on dispose également de la (M_Q, M)-famille $w_P^Q(\lambda, Y, x)$ où $P \in \mathcal{P}^{M_Q}(M)$. On définit alors la distribution $J_M^{Q,b}(Y,\cdot)$ par

$$J_M^{Q,b}(Y,f) = |D^{\mathfrak{g}}(Y)|_v^{1/2} \int_{Z_{M_v}(Y)\backslash G_v} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(Y)\big)\, w_M^Q(Y,x)\, dx.$$

3.2 Propriétés

Proposition 3.1 *Soit $Y \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_M(Y) = Z_G(Y)$. Les distributions $J_M^{G,b}(Y,\cdot)$ vérifient les propriétés suivantes.*

(a) *La distribution $J_M^{G,b}(Y,\cdot)$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure invariante sur l'orbite de Y dans $\mathfrak{g}_v$. En particulier, son support est inclus dans l'adhérence de $(\mathrm{Ad}\, G_v)(Y)$.*

(b) *Pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, l'application $X \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \mapsto J_M^{G,b}(X,f)$ est localement constante. Si T est un sous-tore maximal de M, la restriction de cette application à $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ est à support relativement compact dans $\mathfrak{g}_v$.*

(c) *Pour tout $m \in M_v$ et $k \in K_v$*

$$J_M^{G,b}\big((\mathrm{Ad}\, m)Y, (\mathrm{Ad}\, k)f\big) = J_M^{G,b}(Y,f).$$

(d) *Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$,*

$$J_M^{Q,b}(Y,f) = J_M^{M_Q,b}(Y, f_Q)$$

où f_Q est la fonction appartenant à $C_c^\infty(\mathfrak{m}_{Q,v})$ définie par

$$\forall Z \in \mathfrak{m}_v \quad f_Q(Z) = \int_{K_v \times \mathfrak{n}_{Q,v}} f\big((\mathrm{Ad}\, k^{-1})(Z+V)\big)\, dv\, dk.$$

(e) *Pour tous $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$ et $x \in G_v$,*

$$J_M^{G,b}\big(Y, (\mathrm{Ad}\, x^{-1})(f)\big) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} J_M^{M_Q,b}(Y, f_{Q,x})$$

où l'on a défini la fonction $f_{Q,x} \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_{Q,v})$ par

$$\forall Y \in \mathfrak{m}_{Q,v} \quad f_{Q,x}(Y) = \int_{K_v \times \mathfrak{n}_{Q,v}} f\big((\mathrm{Ad}\, k^{-1})(Y+V)\big)\, v_Q'(kx)\, dv\, dk.$$

Preuve Ces propriétés se déduisent sans difficulté des propriétés des intégrales orbitales pondérées classiques (voir [16] III.3). Précisons un peu. Pour le (b), on utilise le fait que les fonctions $X \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \mapsto r_M^L(X)$, pour $L \in \mathcal{L}(M)$, sont localement constantes. Ce sont en effet des polynômes en $\log\big[|\Phi_\beta(X)|_v^{k_\beta}|\Phi_{2\beta}(X)|_v^{k_{2\beta}}\big]$ (comme on peut le voir par un développement de Taylor sur la fonction C^∞ dont $r_M^L(X)$ est la valeur en 0) et les polynômes Φ_β et $\Phi_{2\beta}$ ne s'annulent pas sur $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. On en déduit également que ces fonctions sont invariantes par adjonction par M_v d'où le (c). Les deux dernières propriétés se montrent à l'aide de manipulations standard sur la (G, M)-famille $(w_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ et de changements de variables. (voir les preuves des propriétés (d) et (f) de [16] III.3). ■

Descente Soit $Y \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_G(Y) = Z_M(Y)$. Appliquons les résultats du paragraphe 1.2.5 à la (G, M)-famille $\big(w_P(Y, x)\big)_{P\in\mathcal{P}(M)}$. Nous obtenons que pour $L \in \mathcal{L}(M)$

$$w_L(Y, x) = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L')\, w_M^{Q'}(Y, x)$$

où $Q' = s(L, L')$. On en déduit aisément que pour tout $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$

$$J_L^{G,b}(Y, f) = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L')\, J_M^{Q',b}(Y, f).$$

A l'aide de la propriété (c) de la proposition précédente, on voit qu'on a la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et $Y \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_G(Y) = Z_M(Y)$,*

$$J_L^{G,b}(X, f) = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L')\, J_M^{L',b}(X, f_{Q'}),$$

où $Q' = s(L, L')$.

3.3 Existence d'une limite aux éléments nilpotents réguliers

Proposition 3.3 *Il existe des coefficients complexes $(d_M^L)_{L\in\mathcal{L}(M)}$ avec $d_M^M = 1$ tels que pour tout $U \in \mathcal{N}_{M,\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{m}_v$*

$$\lim_{A\to 0} J_M^{G,b}(A + U, f) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} d_M^L\, J_L^G(U, f),$$

où la limite est prise sur les éléments $A \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg},v}$.

Preuve Fixons une application exponentielle d'un voisinage $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}}$ de 0 dans $\mathfrak{g}_v$ sur un voisinage $\mathcal{V}_G$ de 1 dans G_v. Quitte à conjuguer par un élément de M_v, on peut supposer que $U \in \mathcal{V}_{\mathfrak{g}}$. Pour A assez proche de 0, A et $U + A$ appartiennent à $\mathcal{V}_{\mathfrak{g}}$. Soit $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$. Alors pour A assez proche de 0, on a

$$\big|\,\beta\big(\exp(A)\big) - \beta\big(\exp(-A)\big)\,\big|_v = |2\beta(A)|_v.$$

Reprenons les notations du corollaire 2.6. Introduisons alors la (G, M)-famille spéciale $(d_P)_{P\in\mathcal{P}(M)}$ définie par

$$d_P = \prod_{\beta\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)} |2|_v^{-k_\beta(|S_\beta^+|+l_\beta|S_\beta^-|)\lambda(\beta^\vee)/2}$$

pour $\lambda \in ia_M^*$. A l'aide du corollaire 2.6 et de l'expression d'un produit de (G, M)-familles, on peut voir que

$$r_M^L(A+U) = r_M^L(A) = \sum_{L'\in\mathcal{L}(M)} d_M^{L'}.r_{L'}^L(\exp U, \exp A),$$

où le coefficient $r_{L'}^L(\exp U, \exp A)$ a été introduit au paragraphe 1.3.2. On conclut facilement en utilisant le résultat général sur les limites rappelé dans ce même paragraphe. ■

3.4 Homogénéité

On rappelle que, dans le corollaire 2.6, on définit, pour tout $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(G, A_M)$, un coefficient $\rho(\beta)$. Pour $t \in F_v$ non nul, on définit alors la (G, M)-famille $c_P(\lambda, t)$ où $P \in \mathcal{P}(M)$ par

$$c_P(\lambda, t) = \prod_\beta |t|_v^{(1/2)\rho(\beta)\lambda(\beta^\vee)}, \quad \lambda \in ia_{M,\mathbb{C}}^*$$

où le produit est pris sur les $\beta \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(P, A_M)$. Cette (G, M)-famille est construite de sorte que, pour tout $Y \in \mathfrak{m}_v$ tel que $Z_G(Y) = Z_M(Y)$,

$$r_P(\lambda, tY) = c_P(\lambda, t).r_P(\lambda, Y). \tag{3.1}$$

Notons alors que, pour de tels Y,

$$w_P(\lambda, tY) = c_P(\lambda, t).w_P(\lambda, Y). \tag{3.2}$$

Les égalités suivantes se déduisent facilement des expressions d'un produit de (G, M)-familles.

$$r_M^G(tY) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} c_M^L(t) r_L^G(Y). \tag{3.3}$$

$$\forall x \in G_v \quad w_M^G(tY, x) = \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} c_M^L(t) w_L^G(Y, x) \tag{3.4}$$

$$= \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} w_L^Q(Y, x) c_Q'(t). \tag{3.5}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3.4 *Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$. On note f_{t^2} la fonction $Y \mapsto f(t^2Y)$. Alors pour tout $Y \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, resp. pour tout $Y = A + U$ où $A \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{reg},v}$ et $U \in \mathfrak{m}_v$ nilpotent régulier,*

$$J_M^{G,b}(t^2Y, f) = |t|_v^d \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} c_M^L(t^2)\, J_L^{G,b}(Y, f_{t^2}) \tag{3.6}$$

$$= |t|_v^d \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} c_Q'(t^2)\, J_M^{Q,b}(Y, f_{t^2}), \tag{3.7}$$

où $d = \dim G - \operatorname{rang} G$.

Preuve On ne traite que le cas où $Y = A + U$. Par définition,

$$J_M^{G,b}(t^2Y, f)$$
$$= |D^{\mathfrak{g}}(t^2Y)|_v^{1/2} \int_{M_v\backslash G_v} \int_{Z_{M_v}(t^2Y)\backslash M_v} f\big((\operatorname{Ad} x^{-1})(\operatorname{Ad} m^{-1})(t^2Y)\big)\, w_M(t^2Y, x)\, dm\, dx.$$

Comme t^2Y et t^2U diffèrent par un élément de $\mathfrak{m}_v$ central et d'après nos choix de mesures faits en 1.1.9, la mesure sur $Z_{M_v}(t^2Y)$ coïncide avec celle sur $Z_{M_v}(t^2U)$. Fixons $x \in G_v$. Si l'on pose $\phi(X) = f\big((\operatorname{Ad} x^{-1})(t^2A + X)\big)$ pour tout $X \in \mathfrak{m}_v$, l'intégrale sur m s'écrit $J_M^M(t^2U, \phi)$ ou encore $J_M^M(U, \phi)$ (car t^2U et U sont conjugués par un élément de M_v). Par ailleurs, on a le résultat d'homogénéité suivant (*cf.* le lemme 3 de [11]) $J_M^M(U, \phi) = |t|_v^{\dim M - \operatorname{rang} M} J_M^M(U, \phi_{t^2})$. Ainsi, on montre que

$$J_M^{G,b}(t^2Y, f) = |t|_v^d |D^{\mathfrak{g}}(Y)|_v^{1/2} \int_{Z_{M_v}(Y)\backslash G_v} f_{t^2}\big((\operatorname{Ad} x^{-1})(Y)\big)\, w_M(t^2Y, x)\, dx.$$

Finalement, les égalités (3.6) et (3.7) se déduisent respectivement des égalités (3.4) et (3.5). ∎

3.5 Développement en germes

Pour $L \in \mathcal{L}(M)$, notons $(\mathcal{N}^{L_v})$ un ensemble de représentants des orbites de $\mathcal{N}_L \cap \mathfrak{l}_v$ sous l'action adjointe de L_v.

Proposition 3.5 *Pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et tout $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$, il existe une fonction $\Gamma_M^L(\cdot\,, U)$ définie sur $\mathfrak{m}_{v,\mathrm{reg}}$ de sorte que pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{l}_v)$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_f$ de 0 dans $\mathfrak{m}_v$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}_f \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$*

$$J_M^{L,b}(X, f) = \sum_{L'\in\mathcal{L}^L(M)} \sum_{U\in(\mathcal{N}^{L'_v})} \Gamma_M^{L'}(X, U)\, J_{L'}^L(U, f). \tag{3.8}$$

De plus, le germe en 0 de $\Gamma_M^L(\cdot\,, U)$ est uniquement déterminé.

Preuve Préoccupons-nous d'abord de l'existence de ces fonctions. Pour $X \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, les distributions $J_M^{L,b}(X,\cdot)$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients dans l'anneau des fonctions localement constantes sur $\mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$) des distributions $J_{M_1}^L(X,\cdot)$ où $M_1 \in \mathcal{L}^L(M)$. A l'aide de la proposition III.7 de [16], il est clair que ces fonctions existent. On peut par exemple prendre

$$\Gamma_M^L(X,U) = \sum_{L' \in \mathcal{L}^L(M)} r_M^{L'}(X) g_{L'}^L(X,U), \tag{3.9}$$

où les $g_{L'}^L(\cdot\,,U)$ sont les fonctions que fixe Waldspurger à la fin du paragraphe III.7 de [16].

L'unicité se démontre par récurrence sur la dimension de L. Lorsque $L = M$, on trouve que $\Gamma_M^M(\cdot\,,U)$ a pour germe en 0 le germe de Shalika associé au groupe M et à l'élément X. Fixons $L \in \mathcal{L}(M)$. Choisissons pour $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$ des fonctions f_U^L telles que pour $V \in (\mathcal{N}^{L_v})$

$$J_L^L(V, f_U^L) = \begin{cases} 1 \text{ si } V = U, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'existence de telles fonctions est bien connue. On en déduit immédiatement que pour X dans un voisinage de 0 et $V \in (\mathcal{N}^{L_v})$

$$\Gamma_M^L(X,V) = J_M^{L,b}(X, f_V^L) - \sum_{L' \in \mathcal{L}^L(M), L' \neq L} \sum_{U \in (\mathcal{N}^{L'_v})} \Gamma_M^{L'}(X,U) J_{L'}^L(U, f_V^L). \tag{3.10}$$ ■

Soit $L \in \mathcal{L}(M)$. Pour tout $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$, on pose

$$d^L(U) = \frac{1}{2}(\dim L_U - \operatorname{rang} L).$$

On choisit également des fonctions $\Gamma_M^L(\cdot\,,U)$ qui vérifient (3.9). On définit une notion d'induite à G de la L_v-orbite de U de la façon suivante : l'induite notée U^G est la réunion des classes de G_v-conjugaison nilpotentes de $\mathfrak{g}_v$ qui, pour tout $P \in \mathcal{P}(L)$, coupent $U \oplus \mathfrak{n}_{P,v}$ selon un ouvert dense. Notons que U^G est une réunion finie de classes de G_v-conjugaison toutes contenues dans la même orbite géométrique. Pour $V \in (\mathcal{N}^{G_v})$, on pose

$$[U^G : V] = \begin{cases} 1 \text{ si } V \in U^G, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Dans [6] Section 10, Arthur a introduit, pour tout élément unipotent u de M_v, une (G,M)-famille notée $\big(c_P(\lambda,u,t)\big)_{P \in \mathcal{P}(M)}$ où $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ et $t \in F_v$.

Proposition 3.6 *Soit $U \in (\mathcal{N}^{G_v})$. Pour tout $t \in F_v$ non nul, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}$*

$$\Gamma_M^G(t^2X,U) = |t|_v^{2d^G(U)} \sum_{M' \in \mathcal{L}(M), L \in \mathcal{L}(M')} c_M^{M'}(t^2) \sum_{V \in (\mathcal{N}^{L_v})} \Gamma_{M'}^L(X,V) c_L^G(\exp V, t^2)[V^G : U].$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve Fixons $t \in F_v$ non nul. A l'aide de la proposition 10.2 de [6], on voit qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $L' \in \mathcal{L}(M)$ et tout $X \in \mathcal{V}$

$$g^G_{L'}(t^2X, U) = |t|_v^{2d^G(U)} \sum_{L \in \mathcal{L}(L')} \sum_{V \in (\mathcal{N}^{L_v})} g^L_{L'}(X, V) c^G_L(\exp V, t^2)[V^G : U].$$

On a utilisé le fait que t^2U et U sont dans la même classe de G_v-conjugaison. Par ailleurs, la formule (3.9) s'écrit ici

$$\Gamma^G_M(t^2X, U) = \sum_{L' \in \mathcal{L}(M)} r^{L'}_M(t^2X) g^G_{L'}(t^2X, U).$$

Le facteur $r^{L'}_M(t^2X)$ se développe à l'aide de l'égalité (3.3). On en déduit facilement le résultat. ■

4 Le résultat principal

Cette partie a pour but de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Pour tout sous-groupe de Lévi M de G et toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$,*

$$\sup_{X \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}} |J^{G,b}_M(X, f)| < \infty.$$

Remarques Comme fonction de X, $J^{G,b}_M(X, f)$ est invariante par l'action de M_v. Comme il n'y a, à conjugaison par M_v près, qu'un nombre fini de sous-tores maximaux de M, il suffit de prouver le même résultat en prenant le supremum sur les $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ où T est un sous-tore maximal de M.

Pour $M = G$, on retrouve les intégrales orbitales ordinaires et le théorème est alors un résultat de Harish-Chandra : c'est le théorème 13 p. 64 de [10].

Pour démontrer le théorème 4.1, nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de G. Si celle-ci vaut 1 ou 2, le groupe G est commutatif et nos intégrales orbitales sont les intégrales orbitales ordinaires. Le théorème est vrai d'après le résultat déjà cité de Harish-Chandra. Soit un entier $n_0 \geqslant 3$. Nous supposerons par hypothèse de récurrence que le théorème 4.1 est vrai pour tout groupe réductif de dimension strictement inférieure à n_0 ; nous noterons $(\mathrm{HR})_{n_0}$ cette hypothèse. Fixons un groupe réductif G de dimension n_0.

Dans la partie 4.1, nous montrerons sous notre hypothèse de récurrence que le théorème 4.1 est vrai pour G si G n'est pas semi-simple. On supposera donc dans les parties suivantes que G est semi-simple. Soit T un sous-tore maximal de M. Comme l'application

$$X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \mapsto J^{G,b}_M(X, f)$$

est à support relativement compact, il suffit de prouver le résultat suivant : pour tout $Y \in \mathfrak{t}_v$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Y dans $\mathfrak{t}_v$ tel que

$$\sup_{X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}} |J^{G,b}_M(X, f)| < \infty.$$

Dans la partie 4.2, on montre que de tels voisinages existent pour $Y \neq 0$ à l'aide d'une formule de descente qui relie les intégrales orbitales de G à celles de G_Y ; on rappelle que G_Y désigne la composante neutre du centralisateur de Y dans G. Comme $\dim G_Y < \dim G$, le théorème 4.1 s'applique au groupe réductif G_Y. Les autres parties sont consacrées au cas $Y = 0$.

4.1 Où l'on montre que l'on peut supposer G semi-simple

Proposition 4.2 *Soit G un groupe réductif de dimension n_0. Si G n'est pas semi-simple, alors le théorème 4.1 est vrai pour le groupe G.*

On note G', resp. Z, le groupe dérivé de G, resp. le centre connexe, dont l'algèbre de Lie est notée $\mathfrak{g}'$, resp. $\mathfrak{z}$. On sait bien que $G = Z \cdot G'$, $Z \cap G'$ est fini et $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$.

Posons $G_1 = G'_v$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}'_v$. Le groupe $G_0 = Z_v \cdot G_1$ est un sous-groupe ouvert de G_v d'indice fini. Pour tout tore maximal T de G défini sur F_v, on note $T_0 = T_v \cap G_0$ et $T_1 = T_v \cap G_1$. Notons que T_1 est le groupe des F_v-points du sous-tore maximal $T \cap G'$ de G'. On munit les groupes G_0, G_1, T_0 et T_1 de mesures de Haar. On définit pour un sous-groupe de Lévi M de G qui contient T, $y \in G_v$, $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ une distribution $\mathfrak{J}_M^{G,y}(X,\cdot)$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$ par

$$\mathfrak{J}_M^{G,y}(X,f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|_v^{1/2} \int_{T_1\backslash G_1} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X)\big)\, w_M(X,xy)\, dx.$$

Notons $\mathcal{Y}$ un ensemble (fini) de représentants de l'ensemble des doubles classes $T_v \backslash G_v / G_0$. Le lemme suivant se démontre facilement à l'aide d'un changement de variable.

Lemme 4.3 *Pour tout sous-tore T maximal de M et tout $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$*

$$J_M^{G,b}(X,f) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathfrak{J}_M^{G,y}\big(X,(\mathrm{Ad}\, y)f\big).$$

Pour tout sous-groupe H de G, on note H' le sous-groupe $H \cap G'$ de G'. Notons que si M est un sous-groupe de Lévi de G, M' est un sous-groupe de Lévi de G'. On obtient ainsi des bijections naturelles de $\mathcal{L}(M)$, resp. $\mathcal{P}(M)$, resp. $\mathcal{F}(M)$, sur $\mathcal{L}^{G'}(M')$, resp. $\mathcal{P}^{G'}(M')$, resp. $\mathcal{F}^{G'}(M')$.

L'espace $a_{M'}^*$ s'identifie naturellement et isométriquement au sous-espace $(a_M^G)^*$ de a_M^*. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, l'ensemble des racines simples $\Delta_{P'}$ de $\Sigma(P', A_{M'})$ s'envoie sur Δ_P. On en déduit des identifications semblables pour les espaces duaux et les ensembles de coracines. De plus, ces identifications préservent les distances euclidiennes. Ainsi pour tout $\lambda \in ia_{M'}^*$, $\theta_{P'}(\lambda) = \theta_P(\lambda)$.

Fixons un sous-groupe compact K' de G_1 en bonne position par rapport à M'_0 (*cf.* 1.1.2). Ce choix effectué, nous pouvons introduire, pour $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $x_1 \in G_1$, la (G', M')-famille suivante

$$(w_1)_{P'}(\lambda, X_1, x_1) = r_{P'}(\lambda, X_1) e^{-\lambda(H_{P'}(x_1))}$$

où $P' \in \mathcal{P}(M')$ et $\lambda \in ia^*_{M'}$. Nous pouvons également introduire la (G, M)-famille $\tilde{w}$ définie par

$$\tilde{w}_P(\lambda, X_1, x_1) = (w_1)_{P'}(\lambda, X_1, x_1)$$

pour $\lambda \in ia^*_M$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Remarquons que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus ne dépend que de la projection de λ sur $i(a^G_M)^*$ ce qui est cohérent avec la définition précédente.

L'intérêt d'introduire les (G', M')-familles w_1 est évident : les intégrales orbitales pondérées du groupe G' s'écrivent pour $X \in \mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{g}'_{\text{reg}}$ et $f \in C^\infty_c(\mathfrak{g}_1)$

$$J^{G',b}_{M'}(X, f) = |D^{\mathfrak{g}'}(X)|^{1/2} \int_{T_1\backslash G_1} f\big((\operatorname{Ad} x^{-1})(X)\big)\, (w_1)_{M'}(X, x)\, dx.$$

L'intérêt d'introduire les (G, M)-familles $\tilde{w}$ apparaîtra au cours de la démonstration du lemme 4.5. Le lemme suivant, de preuve évidente, relie les familles $\tilde{w}$ et w_1.

Lemme 4.4 *Pour tout $Q \in \mathcal{F}(M)$,*

$$\tilde{w}^Q_M(X_1, x_1) = (w_1)^{Q'}_{M'}(X_1, x_1).$$

Tout $X \in \mathfrak{t}_v$ s'écrit $X_Z + X_1$ avec $X_Z \in \mathfrak{z}_v$ et $X_1 \in \mathfrak{g}_1$. Comme $C^\infty_c(\mathfrak{g}_v) = C^\infty_c(\mathfrak{z}_v) \otimes C^\infty_c(\mathfrak{g}_1)$, il suffit de considérer des fonctions de la forme $f = f_Z \otimes f_1$ avec $f_Z \in C^\infty_c(\mathfrak{z}_v)$ et $f_1 \in C^\infty_c(\mathfrak{g}_1)$.

Lemme 4.5 *Pour de telles fonctions f*

$$J^{G,y}_M(X, f) = f_Z(X_Z) \cdot \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} J^{M_{Q'}}_{M'}(X_1, f_{1,Q,y}),$$

où $f_{1,Q,y} \in C^\infty_c(\mathfrak{m}'_Q)$ est définie par

$$f_{1,Q,y}(Y) = \int_{K' \times \mathfrak{n}_{Q'}} f_1((\operatorname{Ad}(k^{-1})(Y + V)) v'_Q(ky)\, dk\, dV.$$

Preuve Tout d'abord, $|D^{\mathfrak{g}}(X)|_v = |D^{\mathfrak{g}'}(X_1)|_v$. On remarque également que pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in ia^*_M$, $r_P(\lambda, X) = r_P(\lambda, X_1)$, si bien que

$$\int_{T_1\backslash G_1} f\big((\operatorname{Ad} x_1^{-1})(X)\big)\, w_M(X, x_1 y)\, dx_1$$
$$= f_Z(X_Z) \int_{T_1\backslash G_1} f_1\big((\operatorname{Ad} x_1^{-1})(X_1)\big)\, w_M(X_1, x_1 y)\, dx_1.$$

Etudions pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in ia^*_{M'}$, $w_P(\lambda, X_1, x_1 y)$. Notons tout de suite que $r_P(\lambda, X_1) = r_{P'}(\lambda, X_1)$: cela vient du fait que $\Sigma^{\text{nd}}(P, A_M)$ s'identifie à $\Sigma^{\text{nd}}(P', A_{M'})$. Soit $Q \in \mathcal{F}(M)$. Notons $k'_Q(x_1)$ un élément de K' tel que $x_1 k'_Q(x_1)^{-1} \in Q'_v$. Alors

$$w_P(\lambda, X_1, x_1 y) = \tilde{w}_P(\lambda, X_1, x_1) \cdot e^{-\lambda((H_P(k'_P(x_1)y)))}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

L'expression d'un produit de (G, M)-familles permet d'écrire que

$$w_M(X_1, x_1 y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} \tilde{w}_M^Q(X_1, x_1) v'_Q\big(k'_Q(x_1) y\big).$$

En utilisant le lemme 4.4 et la décomposition

$$T_1 \setminus G_1 = T_1 \setminus M_{Q',v} \times N_{Q',v} \times K'$$

on obtient sans difficulté le résultat voulu. ■

La preuve de la proposition 4.2 est maintenant claire. Les lemmes 4.3 et 4.5 montrent qu'il suffit de savoir borner les intégrales orbitales pondérées associées à des groupes de dimension inférieure à $\dim G' (< \dim G = n_0)$; par conséquent on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence.

4.2 Descente au centralisateur d'un élément semi-simple non nul

On fixe dans cette partie un groupe semi-simple G, un sous-groupe de Lévi M de G et un sous-tore maximal T de M. On veut prouver la proposition suivante.

Proposition 4.6 *Sous l'hypothèse* $(\mathrm{HR})_{n_0}$, *pour tout* $Y \in \mathfrak{t}_v$ *non nul et toute fonction* $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* Y *dans* $\mathfrak{t}_v$ *tel que*

$$\sup_{X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}} |J_M^{G,b}(X, f)| < \infty.$$

Remarquons tout de suite que cette proposition est une conséquence immédiate de l'hypothèse de récurrence si T n'est pas un tore M-elliptique. En effet, dans ce cas, on peut trouver un sous-groupe de Lévi M_1 strictement inclus dans M qui contient T. La proposition 3.2 permet d'écrire

$$J_M^{G,b}(X, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M_1)} d_{M_1}^G(M, L) J_{M_1}^{L,b}(X, f_Q) \tag{4.1}$$

où $Q = s(M, L)$. Le coefficient $d_{M_1}^G(M, L)$ est nul sauf si $\mathfrak{a}_{M_1}^M \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^L = \mathfrak{a}_{M_1}^G$. En particulier, $d_{M_1}^G(M, G) = 0$. Dans l'expression (4.1), on peut donc restreindre la somme aux sous-groupes L strictement inclus dans G. Pour de tels groupes, l'hypothèse de récurrence s'applique et on obtient la proposition 4.6 pour un tore non M-elliptique.

Il nous reste à prouver la proposition 4.6 dans le cas d'un tore M-elliptique. Fixons donc un tel tore T. Remarquons que pour $Y \in \mathfrak{t}_v$, $A_{M_Y} = A_M$. Dans la suite, on fixe un élément $Y \in \mathfrak{t}$ qu'on suppose non nul. On note H le groupe réductif connexe G_Y. On remarque que M_Y est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique de H. Fixons une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique minimal de H, qu'on suppose incluse dans M_Y, et un sous-groupe compact maximal K_H en bonne position par rapport à celle-ci. Dans la suite, on aimerait exprimer l'intégrale orbitale $J_M^{G,b}(X,f)$, où X appartient à un voisinage de Y dans $\mathfrak{t}_v$, à l'aide d'intégrales $J_{M_Y}^{L_H,b}(X,\phi)$, associées à un sous-groupe de Lévi L_H de H et à une fonction ϕ lisse à support compact sur $\mathfrak{l}_{H,v}$, auxquelles on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence.

Rappelons que les intégrales orbitales pondérées associées au groupe H dépendent du choix du sous-groupe compact maximal K_H de H : en effet, pour tout $P \in \mathcal{F}^H(M_Y)$, nous déduisons de ce choix une application H_P de H_v dans a_{M_Y} et une (H, M_Y)-famille définie par

$$(v_0)_P(\lambda, h) = e^{-\lambda(H_P(h))} \tag{4.2}$$

où $P \in \mathcal{P}^H(M_Y)$, $\lambda \in ia_{M_Y}^*$, $h \in H_v$. D'autre part, pour $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, nous pouvons définir la (H, M_Y)-famille suivante

$$(r_0)_P(\lambda, X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nd}}(P, A_{M_Y})} r_\alpha\Big(\frac{\lambda}{2}, X\Big), \tag{4.3}$$

où $P \in \mathcal{P}^H(M_Y)$, $\lambda \in ia_{M_Y}^*$. Notons w_0 la (H, M_Y)-famille produit des familles (4.2) et (4.3). Les intégrales orbitales pondérées de H s'expriment alors à l'aide de w_0. Par exemple, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$ et tout $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$,

$$J_{M_Y}^{H,b}(X) = |D^{\mathfrak{h}}(X)|^{1/2} \int_{T_v \backslash H_v} f\big((\mathrm{Ad}\, h^{-1})X\big)\, (w_0)_{M_Y}(X, h)\, dh. \tag{4.4}$$

Nous allons introduire de nouvelles distributions sur $C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$ sur le modèle de l'expression intégrale (4.4). Elles serviront d'intermédiaires de calcul. Au lieu d'utiliser un poids issu de la (H, M_Y)-famille w_0, on considère les poids provenant de la (G, M)-famille suivante

$$(\tilde{w}_0)_P(\lambda, X, h) = r_P(\lambda, X).(v_0)_{P_Y}(\lambda, h),$$

où $P \in \mathcal{P}(M)$, $\lambda \in ia_{M_Y}^* = ia_M^*$, $h \in H_v$, $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et P_Y est la composante neutre du centralisateur de Y dans P conformément aux notations du paragraphe 1.1.7. Pour un tel X, on considère les distributions définies pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$ par

$$K_M^G(X, f) = |D^{\mathfrak{h}}(X)|^{1/2} \int_{T_v \backslash H_v} f\big((\mathrm{Ad}\, h^{-1})X\big)\, (\tilde{w}_0)_M(X, h)\, dh.$$

Pour un sous-groupe de Lévi $L \in \mathcal{L}(M)$, on a des distributions analogues $K_M^L(X, \cdot)$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{l}_{Y,v})$ obtenues en remplaçant H par L_Y et le poids $(\tilde{w}_0)_M(X, h)$ par $(\tilde{w}_0)_M^L(X, h)$.

Lemme 4.7 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Y dans $\mathfrak{t}_v$ tel que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$, il existe une famille $(\phi_L)_{L \in \mathcal{L}(M)}$ de fonctions dans $C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$ qui vérifie : pour tout $X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$*

$$J_M^{G,b}(X, f) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} K_M^L(X, \phi_L).$$

Preuve D'après le lemme 1.1, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Y dans $\mathfrak{t}_v$ tel qu'il existe une partie compacte C incluse dans $H_v \setminus G_v$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout $g \in G_v$ tel que la projection $\bar{g}$ de g sur le quotient $H_v \setminus G_v$ n'appartienne pas à C

$$(\mathrm{Ad}\, g)\mathcal{V} \cap \mathrm{supp}\, f = \varnothing.$$

Fixons, ce qui est loisible, une fonction $\kappa \in C_c^\infty(G_v)$ qui vérifie

$$\int_{H_v} \kappa(hg)\, dh = \begin{cases} 1 \text{ si } \bar{g} \in C, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, si l'on pose $\mathfrak{g}^Y = (\mathrm{ad}\, Y)\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^Y$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^Y] \subset \mathfrak{g}^Y$. Comme $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$, on a pour tout $X \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$

$$D^{\mathfrak{g}}(X) = D^{\mathfrak{h}}(X) \cdot \det(\mathrm{ad}\, X | \mathfrak{g}^Y)$$

Quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on peut supposer que pour tout $X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$,

$$|\det(\mathrm{ad}\, X | \mathfrak{g}^Y)|_v = |\det(\mathrm{ad}\, Y | \mathfrak{g}^Y)|_v.$$

Donc, sur $\mathcal{V}$, les coefficients $|D^{\mathfrak{g}}(X)|^{1/2}$ et $|D^{\mathfrak{h}}(X)|^{1/2}$ sont égaux à une constante multiplicative près. On a pour tout $X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$

(4.5)
$$|D^{\mathfrak{g}}(X)|^{-1/2} J_M^{G,b}(X, f) = \int_{H_v \setminus G_v} \int_{T_v \setminus H_v} f\big(\mathrm{Ad}\, g^{-1}(\mathrm{Ad}\, h^{-1} X)\big)\, w_M(X, hg)\, dh\, dg.$$

Vue comme fonction de g, l'intégrande est nulle pour $\bar{g} \notin C$. Ainsi l'expression (4.5) est égale à

$$\begin{aligned} &\int_{H_v \setminus G_v} \int_{H_v} \kappa(h'g) \int_{T_v \setminus H_v} f\big(\mathrm{Ad}\, g^{-1}(\mathrm{Ad}\, h^{-1} X)\big)\, w_M(X, hg)\, dh\, dh'\, dg \\ &= \int_{G_v} \kappa(g) \int_{T_v \setminus H_v} f\big(\mathrm{Ad}\, g^{-1}(\mathrm{Ad}\, h^{-1} X)\big)\, w_M(X, hg)\, dh\, dg. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour tout $h \in H_v$ et tout $Q \in \mathcal{F}^H(M_Y)$, soit $k_Q(h) \in K_H$ tel que $hk_Q(h)^{-1} \in Q_v$. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in ia_M^*$, on a

$$w_P(\lambda, X, hg) = (\tilde{w}_0)_P(\lambda, X, h).v_P(\lambda, k_{P_Y}(h)g)).$$

Ainsi l'expression (4.6) est la somme sur $Q \in \mathcal{F}(M)$ de

$$\int_{G_v} \kappa(g) \int_{T_v \setminus H_v} f\big(\mathrm{Ad}\, g^{-1}(\mathrm{Ad}\, h^{-1} X)\big)\, (\tilde{w}_0)_M^Q(X, h) v'_Q\big(k_{Q_Y}(h)g\big)\, dh\, dg. \tag{4.7}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

A l'aide d'un changement de variables, nous obtenons

$$(4.8)\qquad \int_{G_v} \kappa(g) \int_{T_v\backslash M_{Q_Y,v}\times N_{Q_Y,v}\times K_H} f\big(\operatorname{Ad} g^{-1} \operatorname{Ad}(mnk)^{-1}(X)\big) \cdot (\tilde{w}_0)_M^{M_Q}(X,m) v'_Q(kg)\, dm\, dn\, dk\, dg.$$

Notons que nous avons utilisé le fait que $(\tilde{w}_0)_M^Q(X,mnk) = (\tilde{w}_0)_M^{M_Q}(X,m)$. Effectuons un dernier changement de variable : on définit une bijection de $\mathfrak{n}_{Q_Y,v}$ sur $N_{Q_Y,v}$ en associant à $U \in \mathfrak{n}_{Q_Y,v}$, l'unique $n \in N_{Q_Y,v}$ qui vérifie

$$\operatorname{Ad} n^{-1}(\operatorname{Ad} m^{-1})X = (\operatorname{Ad} m^{-1})X + U.$$

Ce changement de variable a pour Jacobien $|D^{\mathfrak{m}_{Q_Y}}(X)|^{1/2}|D^{\mathfrak{h}}(X)|^{-1/2}$. Par conséquent, pour tout $X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, $J_M^{G,b}(X,f)$ est égal à $|\det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{g}^Y)|_v^{1/2}$ multiplié par la somme sur $Q \in \mathcal{F}(M)$ de

$$|D^{\mathfrak{m}_{Q_Y}}(X)|^{1/2} \int_{T_v\backslash M_{Q_Y,v}} \phi_Q(\operatorname{Ad} m^{-1}X)(\tilde{w}_0)_M^{M_Q}(X,m)\, dm,$$

où $\phi_Q \in C_c^\infty(\mathfrak{m}_{Q_Y,v})$ est définie pour tout $Z \in \mathfrak{m}_{Q_Y,v}$ par

$$\phi_Q(Z) = \int_{G_v\times K_H\times \mathfrak{n}_{Q_Y,v}} \kappa(g) f\big(\operatorname{Ad} g^{-1} \operatorname{Ad} k^{-1}(Z+V)\big)\, v'_Q(kg)\, dg\, dk\, dV.$$

On obtient alors le lemme en prenant $\phi_L = |\det(\operatorname{ad} Y|\mathfrak{g}^Y)|_v^{1/2} \sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \phi_Q$. ∎

Le lemme suivant relie les distributions $K_M^G(X,\cdot)$ aux intégrales orbitales pondérées sur le groupe H.

Lemme 4.8 *Pour tout $L \in \mathcal{L}^H(M_Y)$, il existe des fonctions b_L définies sur $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ bornées au voisinage de Y qui vérifient l'assertion suivante.*

Pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$ et tout $L \in \mathcal{L}^H(M_Y)$, il existe des fonctions $f_L \in C_c^\infty(\mathfrak{l}_v)$ telles que

$$\forall X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \quad K_M^G(X,f) = \sum_{L\in\mathcal{L}^H(M_Y)} b_L(X) J_{M_Y}^{L,b}(X,f_L)$$

Preuve Introduisons deux nouvelles (G,M)-familles. Soit $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. La première notée $s_P(\lambda,Y,X)$ est définie par

$$s_P(\lambda,Y,X) = \prod_{\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P,A_M)-\Sigma^{\mathrm{nd}}(P_Y,A_M)} r_\alpha\Big(\frac{\lambda}{2},X\Big),$$

où $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in ia_M^*$. Soit $h \in H_v$. La seconde, notée $w_P(\lambda,Y,X,h)$, est donnée par

$$w_P(\lambda,Y,X,h) = \Big[\prod_{\alpha\in\Sigma^{\mathrm{nd}}(P_Y,A_M)} r_\alpha\Big(\frac{\lambda}{2},X\Big)\Big].(v_0)_{P_Y}(\lambda,h),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

où $P \in \mathcal{P}(M)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$. La (G, M)-famille $(\tilde{w}_0)_P(\lambda, X, h)$ est le produit des deux (G, M)-familles précédentes. Ainsi

$$(\tilde{w}_0)_M(X, h) = \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} s_M^L(Y, X).w_L(Y, X, h).$$

Comme $X \in \mathfrak{t}_v \subset \mathfrak{m}_v$, on a la formule de descente

$$w_L(Y, X, h) = \sum_{L' \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L') w_M^{Q'}(Y, X, h), \tag{4.9}$$

où $Q' = s(L, L')$.

Lemme 4.9 *Pour $Q \in \mathcal{F}(M)$,*

$$w_M^Q(Y, X, h) = \begin{cases} (w_0)_{M_Y}^{Q_Y}(X, h) \textit{ si } a_{M_Q} = a_{M_{Q_Y}}; \\ 0 \textit{ sinon}. \end{cases}$$

Remarquons que pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^* = i\mathfrak{a}_{M_Y}^*$, $w_P(\lambda, Y, X, h) = (w_0)_{P_Y}(\lambda, X, h)$. On en déduit facilement que pour $P \in \mathcal{P}^{M_Q}(M)$, $w_P^Q(\lambda, Y, X, h) = (w_0)_{P_Y}^{Q_Y}(\lambda, X, h)$. Le lemme 4.9 se démontre alors exactement comme les lemmes 8.2 et 8.3 de l'article [6] d'Arthur.

Par conséquent, dans l'égalité (4.9), on peut restreindre la somme aux sous-groupes de Lévi $L \in \mathcal{L}(M)$ qui vérifient $a_L = a_{L_Y}$. Or l'application qui à de tels sous-groupes de Lévi L associe L_Y est une bijection de $\mathcal{L}(M)$ sur $\mathcal{L}^H(M_Y)$. L'égalité (4.9) devient

$$w_L(Y, X, h) = \sum_{L'_Y \in \mathcal{L}^H(M_Y)} d_M^G(L, L')(w_0)_{M_Y}^{Q'_Y}(X, x), \tag{4.10}$$

où $Q' = s(L, L')$. Ainsi,

$$K_M^G(X, f) = \sum_{L'_Y \in \mathcal{L}^H(M_Y)} \Big[\sum_{L \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L, L') s_M^L(Y, X) \Big] \cdot J_{M_Y}^{Q'_Y, b}(X, f).$$

Par ailleurs, avec les notations de la proposition 3.1 (d),

$$J_{M_Y}^{Q'_Y, b}(X, f) = J_{M_Y}^{L'_Y}(X, f_{Q'_Y}).$$

Pour prouver le lemme 4.8, il nous suffit de voir que les fonctions $s_M^L(Y, X)$ sont bornées pour X dans un voisinage de Y. La fonction $s_M^L(Y, X)$ provient d'une (L, M)-famille : c'est la valeur en 0 d'une certaine fonction C^∞. Le développement de Taylor en 0 de cette fonction montre que $s_M^L(Y, X)$ est un polynôme en

$$\log\big(|\Phi_\beta(X)\Phi_{2\beta}(X)|_v\big),$$

où β appartient à $\Sigma^{\mathrm{nd}}(L, A_M) - \Sigma^{\mathrm{nd}}(L_Y, A_M)$. Pour de tels β, $\Phi_\beta(Y)\Phi_{2\beta}(Y) \neq 0$. Les fonctions $s_M^L(Y, X)$ sont donc localement constantes au voisinage de Y. ∎

Fin de la preuve de la proposition 4.6 Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$. Rappelons que l'on veut prouver qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Y dans $\mathfrak{t}_v$ de sorte que $J_M^G(X, f)$ soit bornée pour $X \in \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Le lemme 4.7 montre qu'il suffit de résoudre le même problème pour $K_M^L(X, \phi)$ où $L \in \mathcal{L}(M)$ et $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_v)$. Or ce dernier se ramène, si l'on applique le lemme 4.8 au groupe réductif $G = L$, à borner au voisinage de Y les intégrales orbitales pondérées associées au groupe H et à ses sous-groupes de Lévi (qui contiennent M_Y). Pour cela, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence $(\mathrm{HR})_{n_0}$ à ces groupes.

4.3 Résultats sur les germes

Dans cette partie, on fixe un sous-tore T maximal de M.

Remarque préliminaire On rappelle qu'on se place sous l'hypothèse $(\mathrm{HR})_{n_0}$. Remarquons que cette hypothèse implique en particulier que les germes $\Gamma_M^L(\cdot\,, U)$ pour $L \in \mathcal{L}(M)$, $L \neq G$, et $U \in \mathcal{N}^{L_v}$ sont des germes de fonctions bornées au voisinage de 0. C'est également vrai si l'on remplace M par un autre sous-groupe de Lévi inclus dans L. Il suffit pour cela de se rappeler que les germes peuvent être définis par récurrence à l'aide d'intégrales orbitales pondérées auxquelles l'hypothèse de récurrence s'applique (*cf.* la relation de récurrence (3.10) dans la preuve de la proposition 3.5).

De façon un peu plus subtile, sous la même hypothèse, les germes $\Gamma_L^G(\cdot\,, U)$ pour $L \in \mathcal{L}(M)$, $L \neq M$, sont des germes de fonctions bornées sur $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. A l'aide de la relation (3.10), on voit que cette affirmation est vraie si l'on sait borner l'intégrale orbitale

$$J_L^{G,b}(X, f), \tag{4.11}$$

où $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$ est fixée et $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Or pour de tels X, cette intégrale s'exprime (*cf.* la formule de descente de la proposition 3.2) à l'aide d'intégrales orbitales associées aux sous-groupes de Lévi stricts de G. L'hypothèse $(\mathrm{HR})_{n_0}$ s'applique alors pour ces intégrales qui sont donc bornées. Par conséquent, l'intégrale (4.11) est aussi bornée, ce que l'on voulait.

Notons $\mathfrak{X}(\mathfrak{t}_v)$ l'ensemble des fonctions $\phi\colon \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}} \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe $d \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ une fonction $\phi_i\colon \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}} \to \mathbb{C}$ qui est bornée au voisinage de 0 telle que pour tous $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ et tout $t \in F_v^\times$

$$\phi(t^2 X) = |t|_v^{2d} \cdot \Big(\phi(X) + \sum_{i=1}^{N} \phi_i(X) (\log |t|_v)^i \Big). \tag{4.12}$$

L'entier d est unique : on l'appelle l'exposant de ϕ.

Lemme 4.10 *Pour tout $U \in (\mathcal{N}^{G_v})$, il existe un unique élément de $\mathfrak{X}(\mathfrak{t}_v)$ qui a même germe en 0 que $\Gamma_M^G(\cdot\,, U)$. Son exposant est $d^G(U) = \frac{1}{2}(\dim G_U - \operatorname{rang} G)$.*

Preuve Fixons $U \in (\mathcal{N}^{G_v})$. Ce lemme est l'analogue du lemme III.9 de [16]. La proposition 3.6 affirme que pour tout $t \in F_v^\times$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de 0 inclus dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}_t$

$$\Gamma_M^G(t^2X,U) = |t|_v^{2d^G(U)} \sum_{M'\in\mathcal{L}(M),L\in\mathcal{L}(M')} c_M^{M'}(t^2) \sum_{V\in(\mathcal{N}^{L_v})} \Gamma_{M'}^L(X,V)c_L^G(\exp V,t^2)[V^G:U].$$

Le coefficient $c_M^{M'}(t^2)$, resp. $c_L^G(\exp V,t^2)$, est un polynôme en $\log|t|_v$, qui est nul en $t=1$ sauf si $M=M'$, resp. $L=G$. Pour les couples $(M',L)\neq(M,G)$, la fonction $\Gamma_{M'}^L$ est bornée au voisinage de 0. Ainsi, il existe un entier N et pour tout entier i compris entre 1 et n des fonctions $\psi_i\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{reg},v}\to\mathbb{C}$ bornées au voisinage de 0 de sorte que pour tout $t\in F_v^\times$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de 0 inclus dans $\mathfrak{t}_v\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $X\in\mathcal{V}_t$

$$\Gamma_M^G(t^2X,U) = |t|_v^{2d^G(U)}\Big(\Gamma_M^G(X,U)+\sum_{i=1}^N \psi_i(X)(\log|t|_v)^i\Big). \tag{4.13}$$

Soit ϖ une uniformisante de F_v. Il existe un entier k_0 tel que pour tout $k\geqslant k_0$, tout $X\in\mathcal{V}_\varpi$ et tout entier n compris entre 0 et $N+1$

(4.14)

$$\Gamma_M^G(\varpi^{2(n+k)}X,U) = |\varpi^n|_v^{2d^G(U)}\Big(\Gamma_M^G(\varpi^{2k}X,U)+\sum_{i=1}^N \psi_i(\varpi^{2k}X)(n\cdot\log|\varpi|_v)^i\Big).$$

On en déduit donc que pour tout $k\geqslant k_0$ et tout n compris entre 1 et $N+1$ que

(4.15)

$$|\varpi^n|_v^{2d^G(U)}\Big(\Gamma_M^G(\varpi^{2k}X,U)+\sum_{i=1}^N \psi_i(\varpi^{2k}X)(n\cdot\log|\varpi|_v)^i\Big)$$
$$= |\varpi^{n-1}|_v^{2d^G(U)}\Big(\Gamma_M^G(\varpi^{2(k+1)}X,U)+\sum_{i=1}^N \psi_i(\varpi^{2(k+1)}X)\big((n-1)\cdot\log|\varpi|_v\big)^i\Big)$$

L'égalité (4.15) peut se voir comme une égalité entre polynômes de degré N en $N{+}1$ points distincts. Par conséquent, cette égalité est vraie pour tout n. On en déduit que l'égalité (4.14) est vraie pour tout $k\geqslant k_0$ et pour tout n. Posons $\mathcal{V}=\varpi^{2k_0}\mathcal{V}_\varpi$. Il existe alors, pour tout $X\in\mathcal{V}$, un polynôme P_X de degré N tel que

- $\forall u\in F_v$, $|u|_v=1$ implique $P_{uX}=P_X$ pour tout $X\in\mathcal{V}$;
- $\forall n\in\mathbb{N}, \forall X\in\mathcal{V}, \Gamma_M^G(\varpi^{2n}X,U)=|\varpi|_v^{2d^G(U)n}P_X(n)$.

Définissons alors des fonctions ϕ_i sur $\mathfrak{t}_v\cap\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ de la façon suivante : si $X\in\mathcal{V}-\varpi^2\mathcal{V}$ et $k\in\mathbb{Z}$, $\phi_i(\varpi^{2k}X)$ est égale à $|\varpi|_v^{2d^G(U)k}$ multiplié par le coefficient de $\big(n\log(|\varpi|_v)\big)^i$ dans le polynôme $P_X(n{+}k)$. Il est facile de voir que les fonctions $\phi=\phi_0$ et ϕ_i vérifient l'égalité (4.12) pour tout t non nul et tout $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. De l'égalité (4.14) qui est vraie pour tous les entiers n et k et tout $X \in \mathcal{V}$, on en déduit que

$$P_X(n+k) = |\varpi|_v^{2d^G(U)k}\Big(\Gamma_M^G(\varpi^{2k}X, U) + \sum_{i=1}^{N} \psi_i(\varpi^{2k}X)(n \cdot \log|\varpi|_v)^i\Big).$$

On voit alors que les fonctions ϕ_i et ψ_i coïncident sur $\mathcal{V}$ de même que les fonctions ϕ et $\Gamma_M^G(\cdot\,, U)$. En particulier, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les fonctions ϕ_i sont bornées sur $\mathcal{V}$ et $\phi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{t}_v)$ ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 4.11 *Pour tout sous-groupe de Lévi $L \in \mathcal{L}^0(M)$ et tout $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$ régulier, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}$ et tout $t \in F_v^\times$, $|t|_v < 1$,*

$$\Gamma_M^L(t^2X, U) = \Gamma_M^L(X, U). \tag{4.16}$$

Preuve D'après le lemme précédent, il existe des fonctions $\phi_i \colon \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}$ et tout $t \in F_v^\times$, $|t|_v < 1$,

$$\Gamma_M^L(t^2X, U) - \Gamma_M^L(X, U) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(X)(\log|t|_v)^i. \tag{4.17}$$

Mais d'après la remarque préliminaire, le membre de gauche de l'égalité (4.17) est borné pour tout t tel que $|t|_v < 1$. On en déduit immédiatement que le membre de droite de (4.17) est nul. ■

Corollaire 4.12 *Pour tout sous-groupe de Lévi $L \in \mathcal{L}(M)$ et tout $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$ non régulier, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, une constante $C > 0$ telle que pour tout $X \in \mathcal{V}$ et tout ϵ, $0 < \epsilon < 1$,*

$$|\Gamma_M^L(X, U)| \leqslant C \cdot \|X\|_v^{1-\epsilon}.$$

Preuve Traitons le cas $L = G$, les autres cas sont un peu plus simples. Posons $d = d^G(U)$. Notons que $d \geqslant 1$. D'après le lemme précédent, il existe un entier N et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, tel que pour tout $t \in F_v^\times$, $|t|_v < 1$

$$\Gamma_M^G(t^2X, U) = |t|_v^{2d}\Big(\Gamma_M^G(X, U) + \sum_{i=1}^{N} \phi_i(X)(\log|t|_v)^i\Big), \tag{4.18}$$

où les fonctions ϕ_i sont bornées sur $\mathcal{V}$. La fonction $\Gamma_M^G(\cdot\,, U)$ est bornée sur $\mathcal{V} - t^2\mathcal{V}$: c'est une conséquence de la proposition 4.6. Fixons un instant t. Posons

$$R(X) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(X)(\log|t|_v)^i.$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathcal{V} - t^2\mathcal{V}$

$$\Gamma_M^G(t^{2n}X, U) = |t|_v^{2nd}\Gamma_M^G(X, U) + \sum_{j=1}^{n} |t|_v^{2jd} R(t^{2(n-j)}X).$$

On en déduit facilement que

$$\sup_{X\in\mathcal{V}} |\Gamma_M^G(X, U)| \leqslant \sup_{X\in\mathcal{V}-t^2\mathcal{V}} |\Gamma_M^G(X, U)| + (1 - |t|_v^{2d})^{-1} \sup_{X\in\mathcal{V}} |R(X)| < \infty.$$

Ainsi la fonction $\Gamma_M^G(\cdot\,, U)$ est bornée sur $\mathcal{V}$. Fixons C_1 un majorant commun aux fonctions ϕ_i et à la fonction $\Gamma_M^G(\cdot\,, U)$. On déduit alors de l'égalité (4.18) que pour $X \in \mathcal{V}$ et $|t|_v < 1$

$$|\Gamma_M^G(t^2X, U)| \leqslant C_1 \cdot |t|_v^{2d} \Big(\sum_{i=0}^{N} |\log|t|_v|^i\Big).$$

Il est alors clair qu'on peut trouver des constantes C et ϵ, qui vérifient les conditions de l'énoncé et telles que pour $X \in \mathcal{V}$ et $|t|_v < 1$

$$|\Gamma_M^G(t^2X, U)| \leqslant C \cdot |t^2|_v^{1-\epsilon}.$$

Soit ϖ une uniformisante. Si $X \in \mathcal{V}$, il existe un unique entier n tel que $\varpi^{-2n}X \in \mathcal{V} - \varpi^2\mathcal{V}$; il existe alors une constante C_0 (indépendante de X) tel que $|\varpi^{2n}|_v \leqslant C_0\|X\|_v$. Ainsi

$$|\Gamma_M^G(X, U)| = \big|\Gamma_M^G\big(\varpi^{2n}(\varpi^{-2n}X), U\big)\big| \leqslant C \cdot |\varpi^{2n}|_v^{1-\epsilon} \leqslant C \cdot (C_0\|X\|_v)^{1-\epsilon} \qquad \blacksquare$$

4.4 Fin de la démonstration

Dans cette partie, on fixe $t \in F_v^\times$ tel que $|t|_v < 1$ et une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v)$.

Lemme 4.13 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout ϵ, $0 < \epsilon < 1$, et tout $X \in \mathcal{V}$*

$$|J_M^{G,b}(t^2X, f) - J_M^{G,b}(X, f)| \leqslant C \cdot \|X\|^{1-\epsilon}.$$

Preuve Soit $X \in \mathfrak{t}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. On pose $d = \dim G - \operatorname{rang} G$. On utilise tout d'abord l'égalité (3.7) de la proposition 3.4 ce qui donne

$$J_M^{G,b}(t^2X, f) = |t|_v^d \sum_{Q\in\mathcal{F}(M)} c_Q'(t^2) J_M^{Q,b}(X, f_{t^2}).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

Posons pour tout $Q \in \mathcal{F}^0(M)$, $f^Q = |t|_v^d (f_{t^2})_Q$. On obtient alors

$$J_M^{G,b}(t^2X, f) - J_M^{G,b}(X, f) = J_M^{G,b}(X, |t|_v^d f_{t^2} - f) + \sum_{Q \in \mathcal{F}^0(M)} c'_Q(t^2) J_M^{M_Q,b}(X, f^Q). \tag{4.19}$$

Il nous faut estimer le membre de gauche de cette égalité pour des éléments X dans un voisinage de 0. L'idée est de considérer le développement en germes du membre de droite. Celui-ci se présente sous la forme d'une somme, indexée par les sous-groupes de Lévi $L \in \mathcal{L}(M)$ et par les classes de conjugaisons nilpotentes $U \in (\mathcal{N}^{L_v})$, de germes

$$\Gamma_M^L(X, U)$$

multipliés par

$$J_L^G(U, |t|_v^d f_{t^2} - f) + \sum_{Q \in \mathcal{F}^0(L)} c'_Q(t^2) J_L^{M_Q}(U, f^Q). \tag{4.20}$$

Il convient de distinguer parmi les classes de conjugaison nilpotentes de $(\mathcal{N}^{L_v})$ celles associées aux éléments nilpotents non réguliers. Dans ce cas, les germes correspondants vérifient la majoration cherchée : c'est le corollaire 4.12. Considérons ensuite les classes de $(\mathcal{N}^{L_v})$ associées à des éléments nilpotents réguliers. S'il n'y en a pas, la discussion se termine. S'il existe un élément U nilpotent régulier de $\mathfrak{l}_v$, le coefficient du germe $\Gamma_M^L(X, U)$ dans le développement considéré est égal à l'expression (4.20). Ce coefficient est relié par la proposition 3.3 à la limite, quand $A \in \mathfrak{a}_{L,\mathrm{reg},v}$ tend vers 0, de

$$J_L^{G,b}(A + U, |t|_v^d f_{t^2} - f) + \sum_{Q \in \mathcal{F}^0(L)} c'_Q(t^2) J_L^{M_Q,b}(A + U, f^Q). \tag{4.21}$$

D'après les relations d'homogénéité (proposition 3.4), c'est aussi la limite de

$$J_L^{G,b}\big(t^2(A + U), f\big) - J_L^{G,b}(A + U, f).$$

En remarquant que

$$J_L^{G,b}\big(t^2(A + U), f\big) = J_L^{G,b}(t^2A + U, f),$$

on conclut que la limite considérée est nulle. Ce résultat est vrai pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$ et donc, par la proposition 3.3, l'expression (4.20) est également nulle. La différence $J_M^{G,b}(t^2X, f) - J_M^{G,b}(X, f)$ est ainsi une combinaison linéaire de germes associés à des éléments non réguliers qui vérifient tous la majoration cherchée, d'où le résultat. ∎

Proposition 4.14 *Soit $\mathcal{V}$ le voisinage du lemme précédent qu'on suppose borné. On a*

$$\sup_{X \in \mathcal{V}} |J_M^{G,b}(X, f)| < \infty.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve En appliquant le lemme précédent à $X, \dots, t^{2(n-1)}X$, on voit qu'il existe $C > 0$ et $0 < \epsilon < 1$ tels que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{V}$

$$|J_M^{G,b}(t^{2n}X, f) - J_M^{G,b}(X, f)| \leqslant C \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |t|_v^{k(1-\epsilon)} \|X\|^{1-\epsilon}.$$

Posons $C_1 = C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |t|_v^{k(1-\epsilon)} \sup_{X \in \mathcal{V}} \|X\|^{1-\epsilon} < \infty$. Remarquons que l'adhérence de $\mathcal{V} - t^2\mathcal{V}$ est un compact qui ne contient pas 0. La proposition 4.6 implique que $C_2 = \sup_{X \in \mathcal{V} - t^2\mathcal{V}} |J_M^{G,b}(X, f)| < \infty$. Soit $Y \in \mathcal{V}$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{V} - t^2\mathcal{V}$ tels que $Y = t^n X$. Ainsi

$$|J_M^{G,b}(Y, f)| = |J_M^{G,b}(t^n X, f)| \leqslant C_1 + |J_M^{G,b}(X, f)| \leqslant C_1 + C_2. \qquad \blacksquare$$

5 Lien avec les intégrales orbitales pondérées globales

5.1 Intégrales orbitales pondérées archimédiennes

Dans ce paragraphe, le corps F_v est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par ailleurs, nous reprenons les définitions des parties 1 à 3. On considère G un groupe connexe réductif défini sur F_v. On fixe un facteur de Lévi M_0 d'un sous-groupe parabolique minimal de G et un sous-groupe compact maximal K_v en bonne position par rapport à M_0 (ici il faut comprendre que les algèbres de Lie de A_{M_0} et de K_v sont orthogonales pour la forme de Killing). Soit $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $X \in \mathfrak{m}_v \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Notons T le centralisateur de X dans G et f une fonction dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_v)$. On dispose alors de l'intégrale orbitale pondérée

$$J_M^{G,b}(X, f) = |D^{\mathfrak{g}}(X)|_v^{1/2} \int_{T_v \backslash G_v} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, w_M(X, x)\, dx;$$

le poids $w_M(X, x)$ est défini comme dans la partie 3. Le seul but de ce paragraphe est de montrer que l'intégrale ci-dessus converge absolument. Justifions-le rapidement. Soit N le radical unipotent d'un élément de $\mathcal{P}(M)$. En utilisant la décomposition $G_v = M_v N_v K_v$ et un changement de variables, on est ramené à prouver la convergence absolue de

$$\int_{K_v} \int_{\mathfrak{n}_v} \int_{T_v \backslash M_v} f\Big((\mathrm{Ad}\, k^{-1})\big((\mathrm{Ad}\, m^{-1})X + U\big)\Big)\, w_M(X, n)\, dm\, dU\, dk,$$

où $n \in N_v$ est donné par l'équation

$$(\mathrm{Ad}\, n^{-1})(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X = (\mathrm{Ad}\, m^{-1})X + U.$$

Fixons une hauteur $\|\cdot\|$ sur G_v (*cf.* [7], Section 4) telle que pour tout $x \in G_v$, $\|x\| \geqslant 1$. D'après [16], preuve du lemme III.5, il existe une constante c_1 et un entier q de sorte que pour tout $x \in G_v$ et tout $L \in \mathcal{L}(M)$

$$|v_L(x)| \leqslant c_1(1 + \log \|x\|)^q.$$

Le lemme 2.1 nous affirme que l'élément $n \in N_v$ est une fraction rationnelle de numérateur, un polynôme en $(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X$ et U, et de dénominateur une puissance de $\det\big(\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X|\mathfrak{n}\big) = \det(\mathrm{ad}\, X|\mathfrak{n})$. On en déduit facilement qu'il existe une constante c_2 (qui dépend de X) telle que pour tous m et U

$$1 + \log \|n\| \leqslant c_2\big(1 + \|(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X\|\big)\,(1 + \|U\|);$$

on note encore $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathfrak{g}_v$. En utilisant ces majorations et l'expression d'un produit de (G, M)-famille, on trouve une constante c_3 telle que pour tous m et U

$$|w_M(X, n)| \leqslant c_3\big(1 + \|(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X\|\big)^{q}(1 + \|U\|)^{q}.$$

On conclut aisément en se rappelant que pour tout entier r assez grand (*cf.* le théorème I.3.9 de [14])

$$\int_{T_v\backslash M_v}\big(1 + \|(\mathrm{Ad}\, m^{-1})X\|\big)^{-r}\,dm < \infty.$$

5.2 Décomposition locale des intégrales orbitales pondérées globales

Dans cette partie, on fixe un corps de nombres F. Les groupes considérés dans la suite sont, sauf indication contraire, supposés définis sur F. Les notations utilisées sans plus de précision sont celles de la partie 1 mais relativement au corps F. On fixe un ensemble fini de places S qui contient l'ensemble V_∞ de toutes les places archimédiennes. Si v est une place de F, on note F_v le complété de F à cette place. On définit $\mathbb{A}_S = \prod_{v\in S} F_v$ et $\mathbb{A}^S$ le produit restreint des F_v sur les places v hors de S. On posera $\mathbb{A}^\infty = \mathbb{A}^{V_\infty}$. L'anneau des adèles de F est noté $\mathbb{A}$.

Soit G un groupe réductif connexe. On fixe une composante de Lévi M_0 d'un sous-groupe parabolique minimal de G. On note $\mathcal{S}\big(\mathfrak{g}(\mathbb{A})\big)$ la classe de Schwartz de $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ *i.e.* l'espace engendré par les fonctions $f_\infty \otimes f^\infty$ où $f_\infty = \bigotimes_{v\in V_\infty} f_v$, chaque $f_v \in \mathcal{S}\big(\mathfrak{g}(F_v)\big)$ pour $v \in V_\infty$ et f^∞ est la fonction caractéristique d'un compact ouvert de $\mathfrak{g}(\mathbb{A}^\infty)$. Soit $f \in \mathcal{S}\big(\mathfrak{g}(\mathbb{A})\big)$, $M \in \mathcal{L}(M_0)$ et $X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Le centralisateur de X dans G est un sous-tore maximal de M noté T. A la fin de l'article [8], on s'intéresse à l'intégrale orbitale pondérée

$$\int_{T(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, v_M(x)\, dx; \tag{5.1}$$

le poids $v_M(x)$ est défini à l'aide de la (G, M)-famille $v_P(x) = e^{-\lambda(H_P(x))}$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$. On a noté H_P l'application usuelle de $G(\mathbb{A})$ dans $\mathfrak{a}_M$. Elle dépend du choix d'un sous-groupe compact maximal $K = \prod_v K_v$ de $G(\mathbb{A})$. On impose, pour toute place v, que le sous-groupe K_v de $G(F_v)$ soit en bonne position par rapport à un sous-groupe de Lévi contenu dans M_0, défini sur F_v et minimal.

On suppose que $f = f_S \otimes f^S$ où $f_S = \bigotimes_{v\in S} f_v$, chaque $f_v \in \mathcal{S}\big(\mathfrak{g}(F_v)\big)$, resp. $C_c^\infty\big(\mathfrak{g}(F_v)\big)$, pour $v \in V_\infty$, resp. $v \in S - V_\infty$, et f^S est la fonction caractéristique d'un compact ouvert $\prod_{v\notin S}\mathfrak{k}_v$ de $\mathfrak{g}(\mathbb{A}^S)$. Le but de cette partie est d'obtenir un développement de l'intégrale ci-dessus à l'aide des intégrales orbitales pondérées de f_v, $v\in S$, que nous avons définies dans la partie 3.

Fixons une base $\mathcal{B}$ de a_M formé de poids extrémaux de représentations de G de dimension finie, F-rationnelles et absolument irréductibles. Pour tout sous-groupe de Borel B contenant T, on note $\Sigma(B,T)$ les racines de T dans B et pour tout $\omega\in\mathcal{B}$, on définit un élément $\Psi_{B,\omega}(X)$ appartenant à la clôture algébrique de F par

$$\Psi_{B,\omega}(X)=\prod_{\alpha\in\Sigma(B,T)}\alpha(X)^{\omega(\alpha^\vee)}.$$

C'est même un élément de F : cela vient du fait que ω est un poids F-rationnel.

Quitte à élargir S et à le rendre dépendant de X, on peut supposer les faits suivants pour tout $v\notin S$:

(1) $|D^{\mathfrak{g}}(X)|_v=1$;
(2) Pour tous $\omega\in\mathcal{B}$ et tout sous-groupe de Borel contenant T, $|\Psi_{B,\omega}(X)|_v=1$;
(3) $\forall k\in K_v$ $(\mathrm{Ad}\,k^{-1})X\in\mathfrak{k}_v$;
(4) $\forall x_v\in G(F_v)$, $(\mathrm{Ad}(x_v)^{-1})X\in\mathfrak{k}_v$ implique $x_v\in T(F_v)K_v$.

Les trois premières conditions sont claires. La dernière est une conséquence d'un résultat de compacité qui peut s'énoncer ainsi : l'ensemble des éléments $x\in T(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ tels que $(\mathrm{Ad}\,x^{-1})X$ appartienne à un compact donné de $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ est inclus dans un compact. Il se démontre à l'aide de la théorie de la réduction (*cf.* la démonstration d'un lemme analogue, le lemme 6.1 de [4]).

Dans ce cas, avec des choix judicieux de mesure, l'intégrale (5.1) s'écrit

$$\int_{T(\mathbb{A}_S)\backslash G(\mathbb{A}_S)} f_S\big((\mathrm{Ad}\,x^{-1})X\big)\,v_M(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Dans la suite et contrairement à la partie 1, l'indice v ne désigne pas le groupe des points F_v-rationnels. Ainsi, on note M_v le groupe M lorsqu'on veut le regarder comme un groupe défini sur F_v. On a alors une inclusion de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $a_M\subset a_{M_v}$ qui peut être stricte. On va suivre désormais le formalisme d'Arthur (*cf.* le paragraphe 9 de [5]). Posons $\mathcal{M}=\prod_{v\in S}M_v$ et $a_{\mathcal{M}}=\bigoplus_{v\in S}a_{M_v}$. Par injection diagonale, on a l'inclusion $a_M\subset a_{\mathcal{M}}$. Il faut alors voir $\mathcal{M}$ comme un sous-groupe de Lévi de M défini sur $\mathbb{A}_S$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, resp. $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, l'ensemble des produits $\prod_{v\in S}L_v$, resp. $\prod_{v\in S}P_v$, où L_v est un sous-groupe de Lévi défini sur F_v contenant M_v, resp. P_v est un sous-groupe parabolique défini sur F_v et de facteur de Lévi M_v.

Soit $P\in\mathcal{P}(M)$. Notons $r_{P,v}$ et $w_{P,v}$ les coefficients notés r_P et w_P au paragraphe 3.1 : ils sont définis relativement au corps F_v et au sous-groupe K_v. Choisissons un sous-groupe de Borel B contenant T et contenu dans P. On peut alors voir que pour tout $\omega\in\mathcal{B}$

$$r_{P,v}(2\omega,X)=|\Psi_{B,\omega}(X)|_v.$$

A l'aide de la propriété (2) et de la formule du produit, il vient

$$\prod_{v\in S}r_{P,v}(2\omega,X)=1,$$

et le résultat est encore vrai si l'on remplace 2ω par $\lambda \in ia_M^*$.

Notons x_v les composantes de $x \in G(\mathbb{A})$ et $H_{P,v}$ l'application usuelle de $G(F_v)$ dans l'espace vectoriel réel a_{M_v}. Pour tout $\lambda \in ia_M^*$,

$$e^{-\lambda(H_P(x))} = \prod_{v \in S} r_{P,v}(\lambda, X) e^{-\lambda(H_{P,v}(x_v))} = \prod_{v \in S} w_{P,v}(\lambda, X, x_v).$$

Ainsi le poids $v_M(x)$ est relié à la $(G, \mathcal{M})$-famille $\bigl(\prod_{v \in S} w_{P_v,v}(\lambda_v, X, x_v)\bigr)$, $(\lambda_v)_{v \in S} \in ia_{\mathcal{M}}^*$ et $\prod_{v \in S} P_v \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. On obtient alors l'égalité suivante, conséquence du corollaire 7.2 de [5],

$$v_M(x) = \sum d_M^G\bigl((L_v)_{v \in S}\bigr) \prod_{v \in S} w_{M_v,v}^{Q_{L_v}}(X, x_v);$$

la somme est à prendre sur les $\prod_{v \in S} L_v \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Le coefficient $d_M^G\bigl((L_v)_{v \in S}\bigr)$ est un réel positif, non nul si et seulement si la projection orthogonale

$$\bigoplus_{v \in S} a_{M_v}^{L_v} \to a_M^G \tag{5.3}$$

est un isomorphisme (dans (5.3) on a identifié a_M^G à son plongement diagonal dans $a_{\mathcal{M}}$). Pour tout $v \in S$, $a_{M_v}^{L_v}$ et a_M^G sont des sous-espaces de a_{M_v} : on dispose de la projection orthogonale p_v de a_{M_v} sur a_M^G. Dans le cas où (5.3) est un isomorphisme, le coefficient $d_M^G\bigl((L_v)_{v \in S}\bigr)$ est défini comme le volume dans a_M^G du parallélotope formé par les images par p_v de bases orthogonales de $a_{M_v}^{L_v}$; moyennant un certain choix, on peut également définir une application qui, à L_v, associe un sous-groupe parabolique Q_{L_v} de G défini sur F_v et de facteur de Lévi L_v. On en déduit le développement

$$\int_{T(\mathbb{A}_S) \backslash G(\mathbb{A}_S)} f_S\bigl((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\bigr)\, v_M(x)\, dx = \sum d_M^G\bigl((L_v)_{v \in S}\bigr) \prod_{v \in S} J_{M_v}^{L_v,b}\bigl(X, (f_v)_{Q_{L_v}}\bigr);$$

les indices de sommation parcourent le même ensemble que précédemment. On a utilisé également le fait que $\prod_{v \in S} |D^{\mathfrak{g}}(X)|_v = 1$. Les résultats des parties précédentes et l'égalité ci-dessus montrent en particulier que l'intégrale (5.1) converge absolument.

Soit $v \notin S$ et Q_{L_v} un sous-groupe parabolique de G défini sur F_v et de facteur de Lévi $L_v \supset M_v$. Remarquons qu'à cause des conditions (3) et (4) sur S, l'intégrale $J_{M_v}^{L_v,b}\bigl(X, (f_v)_{Q_{L_v}}\bigr)$ est nulle si $L_v \neq M_v$ et vaut 1 sinon. On a tacitement choisi des mesures pour cela mais ces choix sont compatibles avec ceux qui permettent l'écriture (5.2).

On peut alors remplacer S par l'ensemble V de toutes les places. Le coefficient $d_M^G\bigl((L_v)_{v \in V}\bigr)$ est défini comme précédemment si l'application naturelle

$$\bigoplus_{v \in V} a_{M_v}^{L_v} \to a_M^G$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press

est un isomorphisme—dans ce cas, $M_v = L_v$ en dehors d'un ensemble fini de places—et est nul sinon. Ainsi pour tous les éléments X de $\mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$,

$$\int_{T(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f\big((\mathrm{Ad}\, x^{-1})X\big)\, v_M(x)\, dx = \sum d_M^G((L_v)) \prod_{v \in V} J_{M_v}^{L_v, b}\big(X, (f_v)_{Q_{L_v}}\big)\,.$$

On somme sur les produits $\prod_{v \in V} L_v$ de sous-groupes de Lévi $L_v \supset M_v$. Lorsque $d_M^G((L_v)) \neq 0$, dans le produit des intégrales locales, presque tous les facteurs valent 1 ; en dehors d'un ensemble fini de places, qui ne dépend que de X, le facteur d'indice v vaut 0 sauf si $M_v = L_v$. La somme et les produits qui interviennent sont donc finis.

Références

[1] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups I*. Duke Math. J. **45**(1978), 911–952.

[2] ———, *The trace formula in invariant form*. Ann. of Math. **114**(1981), 1–74.

[3] ———, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II: Explicit formulas*. Amer. J. Math. **104**(1982), 1289–1336.

[4] ———, *On a family of distributions obtained from orbits*. Canad. J. Math. (1) **38**(1986), 179–214.

[5] ———, *The invariant trace formula I. Local theory*. J. Amer. Math. Soc. (2) **1**(1988), 323–383.

[6] ———, *The local behaviour of weighted orbital integrals*. Duke Math. J. **56**(1988), 233–293.

[7] ———, *A local trace formula*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **73**(1991), 5–96.

[8] P.-H. Chaudouard, *La formule des traces pour les algèbres de Lie*. Math. Ann., à paraître.

[9] T. A. Springer and R. Steinberg, *Conjugacy classes*. In: Robert Steinberg, collected papers, with foreword by J.-P. Serre, Amer. Math. Soc., 1997, 293–394.

[10] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*. Notes by G. van Dijk, Lecture Notes in Math. **162**, Springer, 1970.

[11] ———, *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*. In: Collected papers IV, Springer-Verlag, 371–437, 1984.

[12] R. Rao, *Orbital integrals on reductive groups*. Ann. of Math. **96**(1972), 505–510.

[13] J. A. Shalika, *A theorem on semi-simple p-adic groups*. Ann. of Math. **95**(1972), 226–242.

[14] V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on real reductive groups*. Lecture Notes in Math. **576**, Springer, 1977.

[15] ———, *Lie groups, Lie algebras and their representations*. Springer, 1984.

[16] J.-L. Waldspurger, *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques*. J. Reine Angew. Math. **465**(1995), 41–99.

Département de mathématiques
École Normale Supérieure de Cachan
61, avenue du Président Wilson
F-94235 Cachan cedex
France
mél : chaudoua@cmla.ens-cachan.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-009-6 Published online by Cambridge University Press