

## SUR UNE FORMULE DE RAMANUJAN-BAILEY

JIANG ZENG

RÉSUMÉ. L'identité de Ramanujan-Bailey, qui établit une relation symétrique entre deux séries hypergéométriques  ${}_3F_2$ , est généralisée en une relation symétrique entre deux séries hypergéométriques  ${}_4F_3$ . On construit également un modèle symétrique qui rend compte de cette symétrie.

ABSTRACT. The Ramanujan-Bailey identity that establishes a symmetric relation between two hypergeometric series  ${}_3F_2$  is extended to a symmetric relation between two hypergeometric series  ${}_4F_3$ . We also give a symmetric model that makes this symmetry evident.

**1. Introduction.** Dans une lettre de 1913, Ramanujan [11, p. 351] a donné la formule suivante :

$$(1) \quad \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{n+3} + \cdots \\ = \left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \right\}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \right. \\ \left. + \cdots \text{ au } (n+1)^{\text{ième}} \text{ terme} \right\},$$

où  $n$  (et aussi  $m$  dans le reste de l'article) désigne un entier positif.

On notera que la série du premier membre est infinie et que la somme du second membre ne comprend que  $(n+1)$  termes, comme l'indique la notation classique "au  $(n+1)^{\text{ième}}$  terme."

La première démonstration de cette formule fut publiée par Watson [13] en 1929. Depuis lors, Darling [5], Bailey [2], Hodgkinson [8], Whipple [15] et Bailey [3] ont donné à leur tour de nouvelles démonstrations et généralisations. On pourra se reporter aux livres de Bailey [4, p. 92–93], Hardy [7, chap. VII] et Slater [12, p. 81] pour une description plus détaillée de l'historique des travaux inspirés par cette formule. Notons enfin que Watson [14] a même donné une application intéressante à l'étude des constantes de Lebesgue et Landau.

La dernière généralisation due à Bailey (cf. [3], [4], [7], [12]) de la formule

---

Reçu le 14 septembre 1988 et, sous une forme révisée, le 24 octobre 1989.

Avec le soutien financier du PRC Mathématique et Informatique.

A.M.S. Subject Classification (1980) 05A15, 33A15

(1) s'écrit :

$$(2) \quad \frac{\Gamma(x+m+1)\Gamma(y+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(x+y+m+1)} \left[ {}_3F_2 \left( \begin{matrix} x, y, v+m \\ v, x+y+m+1 \end{matrix}; 1 \right) \right]_{n+1} \\ = \frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(x+y+n+1)} \left[ {}_3F_2 \left( \begin{matrix} x, y, v+n \\ v, x+y+n+1 \end{matrix}; 1 \right) \right]_{m+1},$$

où suivant la notation de Hardy [7, p. 112], seuls les premiers  $(n+1)$  (resp.  $(m+1)$ ) termes des deux séries sont retenus.

Lorsque  $x = y = 1/2, v = 1$ , cette formule se réduit à l'identité :

$$(3) \quad \left\{ \frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+1)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{m+2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{m+3} + \dots \text{ au } (n+1)\text{ième terme} \right\} \\ = \left\{ \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{n+2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{n+3} + \dots \text{ au } (m+1)\text{ième terme} \right\},$$

qui donne le théorème de Ramanujan lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

L'objet de la présente Note est de signaler une extension naturelle de la formule (2), à savoir :

$$(4) \quad \frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x, y, v+m \\ v, x+y+z+m, 1-n-z \end{matrix}; 1 \right) \\ = \frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -m, x, y, v+n \\ v, x+y+z+n, 1-m-z \end{matrix}; 1 \right).$$

Elle est comme la formule (2) à la fois symétrique en  $n, m$  et en  $x, y$ ; elle contient un paramètre  $z$  supplémentaire, d'où l'apparition de la série  ${}_4F_3$  avec un paramètre  $z$  arbitraire, au lieu de  ${}_3F_2$ .

Cette formule se réduit évidemment à l'identité (2) de Bailey lorsque  $z = 1$ . De plus, elle contient comme autre cas particulier l'identité de Al-Salam-Fields [1] :

$$(5) \quad \frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, x, y \\ x+y+z+m, 1-n-z \end{matrix}; 1 \right) \\ = \frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -m, x, y \\ x+y+z+n, 1-m-z \end{matrix}; 1 \right).$$

Pour obtenir (5) il suffit dans (4) de faire tendre  $v$  vers  $+\infty$ . A son tour, (5) se réduit à l'identité de Pfaff-Saalschütz, lorsque  $m = 0$ .

Nous présentons ici deux démonstrations de (4). La première fait appel à une transformation de séries due à Whipple. Pour établir (4) on est amené à appliquer la transformation  ${}_4F_3$  de Whipple *deux fois*. Il est à noter que les trois démonstrations présentées par Bailey [3] pour démontrer (2) sont aussi valables pour établir (4). Par ailleurs, Hardy [7] a signalé que la formule (3) était une spécialisation de la transformation  ${}_4F_3$  (cf. (6) ci-après). La deuxième démonstration est une méthode originale de nature combinatoire, qui inspira, en fait, l'extension (4).

Nous remercions l'arbitre anonyme pour ses remarques érudites sur les travaux de Hardy et Bailey concernant l'identité de Ramanujan.

**2. La démonstration analytique.** Notons  $(a)_n$  les factorielles montantes :

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a + 1) \cdots (a + n - 1) \quad (n \geq 1).$$

La formule de Whipple (cf. [4, p. 56]) s'écrit :

$$(6) \quad {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(e - a)_n (f - a)_n}{(e)_n (f)_n} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, a, d - b, d - c \\ d, 1 - e + a - n, 1 - f + a - n \end{matrix}; 1 \right),$$

où  $d + e + f = a + b + c - n + 1$ .

Dans (6), si l'on pose  $a = x, b = y, c = v + m, d = v, e = x + y + z + m$  et  $f = 1 - n - z$ , on obtient :

$$(7) \quad {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x, y, v + m \\ v, x + y + z + m, 1 - n - z \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(y + z + m)_n (1 - n - z - x)_n}{(x + y + z + m)_n (1 - n - z)_n} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x, v - y, -m \\ v, 1 - y - z - m - n, x + z \end{matrix}; 1 \right).$$

On suppose que  $m \leq n$ . Appliquant de nouveau (6) au second membre de (7) et posant  $n = m, a = x, b = v - y, c = -n, d = v, e = 1 - y - z - m - n$  et  $f = x + z$ , l'identité (7) devient alors :

$$(8) \quad {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x, y, v + m \\ v, x + y + z + m, 1 - n - z \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(y + z + m)_n (1 - n - z - x)_n}{(x + y + z + m)_n (1 - n - z)_n} \times \frac{(1 - x - y - z - m - n)_m (z)_m}{(1 - y - z - m - n)_m (x + z)_m} {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -m, x, y, v + n \\ v, x + y + z + m, 1 - n - z \end{matrix}; 1 \right),$$

qui donne l'identité (4) en exprimant les fonctions montantes en des fonctions gamma.

*Remarque.* Dans un article récent, Wimp [16, p. 990] a établi, de façon relativement élaborée, la formule suivante :

$$(9) \quad {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n+x, y, z \\ x-1, y+1, z+1 \end{matrix}; 1 \right) \\ = \frac{n!yz}{(y-z)(x-1)_{n+1}} \left[ \frac{(x-z-1)_{n+1}}{(z)_{n+1}} - \frac{(x-y-1)_{n+1}}{(y)_{n+1}} \right]$$

et a avancé le fait que cette formule ne pouvait être déduite de la formule de Whipple ((6) ci-dessus). C'est, en fait, possible : il suffit d'utiliser la même technique que ci-dessus, c'est-à-dire appliquer la formule de Whipple *deux fois*. Enfin, en utilisant le  $q$ -analogue de la formule de Whipple (6) par deux fois, on trouve alors les  $q$ -analogues de (4) et (9) respectivement comme suit :

$$(10) \quad \frac{(q^nxyz; q)_m(z; q)_m}{(q^nxz; q)_m(yz; q)_m} {}_4\Phi_3 \left[ \begin{matrix} q^{-m}, x, y, vq^n \\ v, q^nxyz, q^{1-m}/z \end{matrix}; q, q \right], \\ = \frac{(q^mxyz; q)_n(z; q)_n}{(q^mzx; q)_n(yz; q)_n} {}_4\Phi_3 \left[ \begin{matrix} q^{-n}, x, y, vq^m \\ v, q^mxyz, q^{1-n}/z \end{matrix}; q, q \right],$$

$$(11) \quad {}_4\Phi_3 \left[ \begin{matrix} q^{-n}, xq^n, y, z \\ xq^{-1}, yq, zq \end{matrix}; q, q \right] = \frac{(q; q)_n(1-y)(1-z)}{(z-y)(xq^{-1}; q)_{n+1}} \\ \times \left[ z^{n+1} \frac{(x/(zq); q)_{n+1}}{(z; q)_{n+1}} - y^{n+1} \frac{(x/(yq); q)_{n+1}}{(y; q)_{n+1}} \right].$$

**3. Le modèle symétrique.** Nous avons déjà démontré dans [17] qu'il y a un modèle symétrique pour l'identité d'Al-Salam-Fields. C'est en fait dans la recherche d'un modèle symétrique pour l'identité de Bailey que l'extension (4) a été découverte. Chassons les dénominateurs dans (4), on est conduit à l'identité polynomiale :

$$(12) \quad (x+z)_m(y+z)_m(v)_m \\ \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k(y)_k(v+m)_k(v+k)_{n-k}(x+y+z+m+k)_{n-k}(z)_{n-k} \\ = (x+z)_n(y+z)_n(v)_n \\ \times \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (x)_k(y)_k(v+n)_k(v+k)_{m-k}(x+y+z+n+k)_{m-k}(z)_{m-k}.$$

Quelques notions de base sont nécessaires pour décrire le modèle combinatoire qui permet d'interpréter l'identité (12). Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoints de cardinal  $m$  et  $n$  respectivement. Rappelons d'abord que le polynôme générateur

de l'ensemble des injections  $\sigma$  de  $A$  dans  $A + B$  par le nombre de cycles, noté  $\text{cyc } \sigma$ , est donné par (cf. [6]) :

$$(13) \quad \sum_{\sigma} a^{\text{cyc}\sigma} = (a + n)_m.$$

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $A + B$ . Étant donnée une application  $\sigma$  de  $E$  dans  $A + B$ , un élément  $a$  de  $E$  est dit *homogène* si  $a \in A$  (resp.  $B$ ) entraîne  $\sigma(a) \in A$  (resp.  $B$ ). Une application tricolore de  $E$  dans  $A + B$  est définie comme étant un couple  $(\sigma, f_{\sigma})$ , où  $\sigma$  est une application de  $E$  dans  $A + B$  et  $f_{\sigma}$  une application de l'ensemble des cycles de  $\sigma$  dans  $\{1, 2, 3\}$ . Par commodité, pour chaque cycle  $c$  de  $\sigma$ , on appelle  $f_{\sigma}(c)$  la *couleur* de  $c$ . Dans le cas particulier où  $\sigma$  est une endofonction (resp. injection, resp. permutation), le couple  $(\sigma, f_{\sigma})$  se réduit à une endofonction (resp. injection, resp. permutation) tricolore. Notons enfin  $\text{cyc}_i(\sigma, f_{\sigma})$  le nombre de cycles de  $(\sigma, f_{\sigma})$  de couleur  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Si l'on associe à  $(\sigma, f_{\sigma})$  le poids

$$w(\sigma, f_{\sigma}) = \alpha^{\text{cyc}_1(\sigma, f_{\sigma})} d^{\text{cyc}_2(\sigma, f_{\sigma})} \beta^{\text{cyc}_3(\sigma, f_{\sigma})},$$

il est alors facile, d'après (13), d'établir l'identité :

$$(14) \quad \sum_{(\sigma, f_{\sigma})} w(\sigma, f_{\sigma}) = (\alpha + \beta + d + n)_m,$$

où la sommation est étendue à toutes les injections tricolores de  $A$  dans  $A + B$ .

Considérons maintenant l'ensemble  $T[A, B; 1, 2, 3]$  de tous les triplets  $(\varphi, (\sigma, f_{\sigma}), (\tau, g_{\tau}))$ , où  $\varphi$  est une permutation de  $A + B$ , et où  $(\sigma, f_{\sigma})$  et  $(\tau, g_{\tau})$  sont deux permutations tricolores de  $A + B$  ayant les propriétés suivantes :

- (i) tous les cycles de  $(\sigma, f_{\sigma})$  (resp.  $(\tau, g_{\tau})$ ) de couleur 1 sont entièrement contenus dans  $A$  (resp.  $B$ );
- (ii) tous les cycles de  $(\sigma, f_{\sigma})$  (resp.  $(\tau, g_{\tau})$ ) de couleur 3 sont entièrement contenus dans  $B$  (resp.  $A$ );
- (iii) tous les cycles de  $(\sigma, f_{\sigma})$  (resp.  $(\tau, g_{\tau})$ ) de couleur 2 sont entièrement contenus dans l'ensemble des éléments homogènes de  $\varphi$  (resp.  $A$  ou  $B$ ).

Si  $(\varphi, (\sigma, f_{\sigma}), (\tau, g_{\tau}))$  est un tel triplet, soient  $C$  l'ensemble des points non homogènes de  $\varphi$  appartenant à  $A$  et  $D$  l'union de tous les cycles de  $(\tau, g_{\tau})$  de couleur 3 (par définition,  $D \subset B$ ). Dans la figure 1, on représente  $A + B$  par un rectangle, puis  $\varphi, (\sigma, f_{\sigma})$  et  $(\tau, g_{\tau})$  par leurs graphes sur trois rectangles identiques, au lieu de superposer ces trois graphes sur un même rectangle. On place les graphes de  $(\sigma, f_{\sigma})$  et  $(\tau, g_{\tau})$  au-dessous de celui de  $\varphi$ , respectivement à gauche et à droite. La partition  $(A, B \setminus D, D)$  est représentée par trois tranches verticales et l'ensemble  $C$  apparaît au milieu de  $A$ . Enfin, les cycles de chaque permutation tricolore de couleur 1, 2 et 3 sont formés, respectivement, par des flèches fines, pointillées et épaisses.

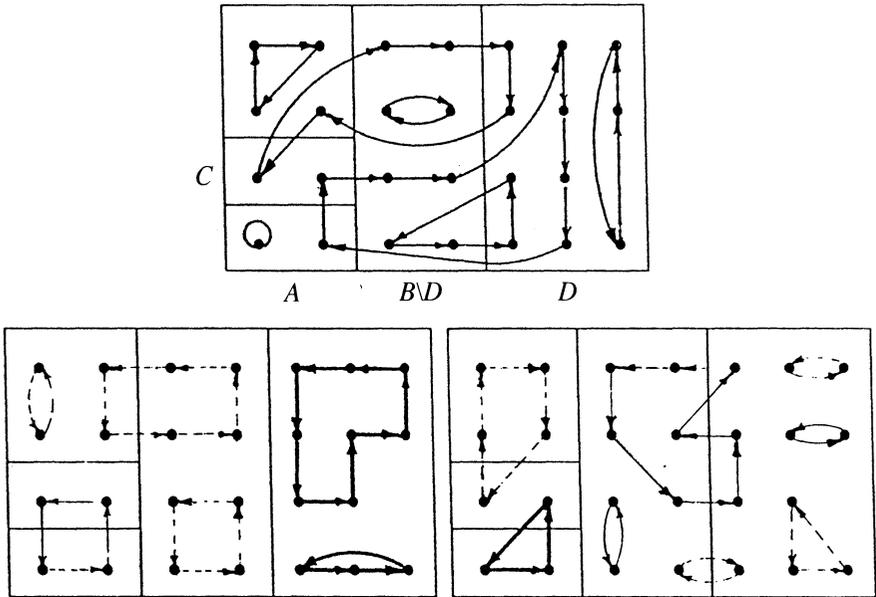


Figure 1

D'après la définition ci-dessus, chaque élément de  $T[A, B; 1, 2, 3]$  est en même temps un élément de  $T[B, A; 3, 2, 1]$  et vice versa. D'où

$$T[A, B; 1, 2, 3] = T[B, A; 3, 2, 1].$$

Par conséquent, si l'on munit chaque triplet  $(\varphi, (\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))$  de l'ensemble  $T[A, B; 1, 2, 3]$  de la fonction-poids :

$$(15) \quad w(\varphi, (\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau)) = v^{\text{cyc}\varphi} x^{\text{cyc}_1(\sigma, f_\sigma)} z^{\text{cyc}_2(\sigma, f_\sigma)} y^{\text{cyc}_3(\sigma, f_\sigma)} \\ \times x^{\text{cyc}_1(\tau, g_\tau)} z^{\text{cyc}_2(\tau, g_\tau)} y^{\text{cyc}_3(\tau, g_\tau)},$$

alors le polynôme générateur  $F(A, B; x, y, z, v)$  de  $T[A, B; 1, 2, 3]$  par la fonction-poids ci-dessus est *symétrique* en  $(A, x)$  et  $(B, y)$ , à savoir

$$(16) \quad F(A, B; x, y, z, v) = F(B, A; y, x, z, v).$$

On se propose de montrer que  $F(A, B; x, y, z, v)$  est égale à l'un des deux membres de (12). Ceci suffit pour établir l'identité (4). Autrement dit, il suffit de prouver l'identité :

$$(17) \quad F(A, B; x, y, z, v) = (x + z)_m (y + z)_m (v)_m \\ \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_k (v + m)_k (v + k)_{n-k} \\ \times (x + y + z + m + k)_{n-k} (z)_{n-k}.$$

En effet, il est facile d'interpréter le second membre de l'identité (17). Pour tout sous-ensemble  $K$  de  $B$ , on note  $Q_K[A, B; 1, 2, 3]$  l'ensemble des triplets  $(\varphi, \sigma, \tau)$  tels que :

(i)  $\varphi$  est une endofonction de  $A + B$ ; de plus, la restriction  $\varphi_A$  à l'ensemble  $A$  est une permutation de  $A$  et la restriction  $\varphi_{B \setminus K}$  (resp.  $\varphi_K$ ) est une injection de  $B \setminus K$  dans  $B$  (resp. de  $K$  dans  $A + K$ );

(ii)  $\sigma$  (resp.  $\tau$ ) est une endofonction tricolore de  $A + B$ ; de plus, la restriction  $\sigma_A$  (resp.  $\tau_A$ ) est une permutation tricolore de  $A$  n'ayant que des cycles de couleur 1 ou 2 (resp. 3 ou 2); en outre, la restriction  $\sigma_{B \setminus K}$  (resp.  $\tau_{B \setminus K}$ ) est une injection tricolore de  $B \setminus K$  dans  $A + B$  (resp. permutation tricolore de  $B \setminus K$ , n'ayant que des cycles de couleur 2); enfin,  $\sigma_K$  (resp.  $\tau_K$ ) est une permutation tricolore de  $K$  n'ayant que des cycles de couleur 3 (resp. 1).

Pour avoir une vision géométrique de cette définition, le lecteur est prié de se reporter à la figure 2, où on place les graphes de  $\sigma$  et  $\tau$  au-dessous de celui de  $\varphi$ , respectivement à gauche et à droite.

On pose

$$Q[A, B; 1, 2, 3] = \bigcup_K Q_K[A, B; 1, 2, 3] \quad (K \subseteq B).$$

Si  $K$  est de cardinal  $k$ , on a d'après (13) et (14) :

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi} w(\varphi) &= \sum w(\varphi_A) \sum w(\varphi_{B \setminus K}) \sum w(\varphi_K) \\ &= (v)_m (v+k)_{n-k} (v+m)_k, \\ \sum_{\sigma} w(\sigma) &= \sum w(\sigma_A) \sum w(\sigma_{B \setminus K}) \sum w(\sigma_K) \\ &= (x+z)_m (x+y+z+m+k)_{n-k} (y)_k, \\ \sum_{\tau} w(\tau) &= \sum w(\tau_A) \sum w(\tau_{B \setminus K}) \sum w(\tau_K) \\ &= (y+z)_m (z)_{n-k} (x)_k. \end{aligned}$$

Comme il y a  $\binom{n}{k}$  tels sous-ensembles  $K \subseteq B$ , la fonction génératrice de  $Q[A, B; 1, 2, 3]$  est égale à

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (v)_m (v+k)_{n-k} (v+m)_k (x+z)_m (x+y+z+m+k)_{n-k} (y)_k (y+z)_m (z)_{n-k} (x)_k,$$

qui est exactement le second membre de (17).

La démonstration combinatoire de (12) consiste à construire une bijection entre le modèle symétrique  $T[A, B; 1, 2, 3]$  et le modèle  $Q[A, B; 1, 2, 3]$ , dont on vient de calculer la fonction génératrice.

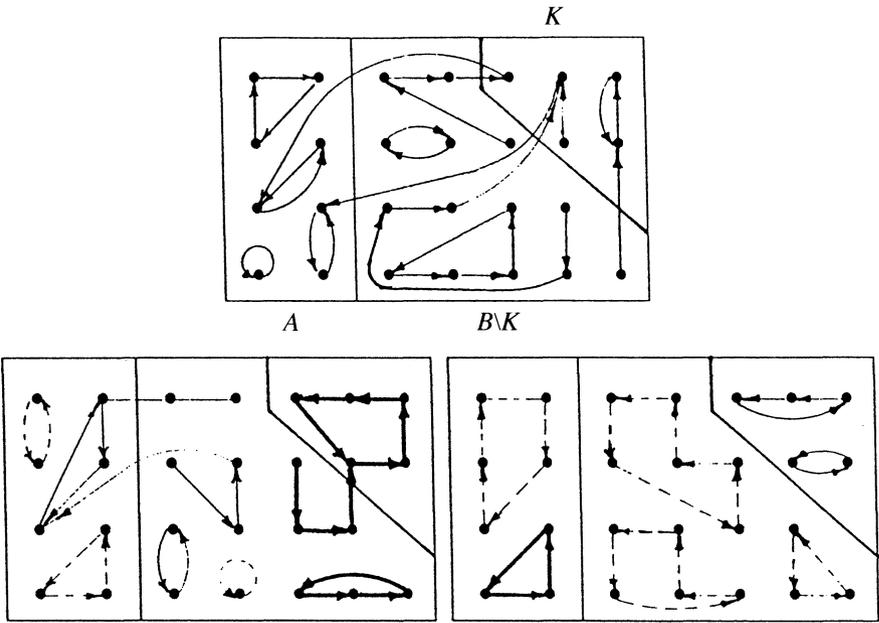


Figure 2

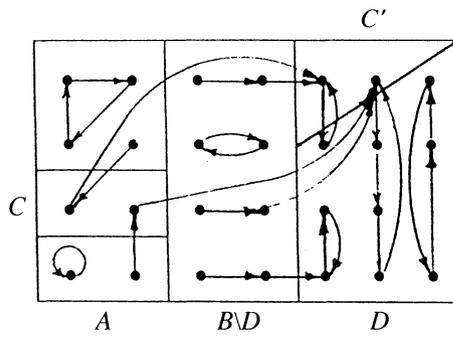


Figure 1'

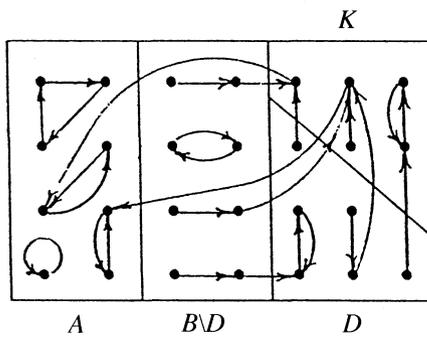


Figure III'

**4. La bijection.** La bijection permettant de passer de la Figure 1 à la Figure 2 est illustrée par la suite des trois figures Figure I, Figure II, Figure III reproduites ci-après. Les opérations élémentaires utilisées sont les suivantes :

(i) la transformation consistant à décomposer une injection  $\sigma$  de  $A + B + C$  dans  $A + B + C + D$ , où  $A, B, C$  et  $D$  sont des ensembles finis disjoints, en trois injections  $\sigma_A, \sigma_B$  et  $\sigma_C$ , respectivement de  $A$  dans  $A + D$ , de  $B$  dans  $A + B + D$  et de  $C$  dans  $A + B + C + D$ , est obtenue de la façon suivante : chaque fois qu'une flèche de  $\sigma$  a son origine, disons  $\nu$ , dans  $A$  (resp.  $B$ ) et son but dans  $B + C$  (resp.  $C$ ), elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine dont le but est le premier itéré de  $\nu$  qui soit de nouveau dans  $A + B$  (resp.  $A + B + D$ ). On la note  $\Phi_1(A, B, C; D)$  et tout simplement  $\Phi_1(A, B)$  (resp.  $\Phi_1(A, B, C)$ , resp.  $\Phi_1(A, B; D)$ ) lorsque  $C = D = \emptyset$  (resp.  $D = \emptyset$ , resp.  $C = \emptyset$ ).

Evidemment le nombre de cycles de  $\sigma$  est la somme de cycles de  $\sigma_A, \sigma_B$  et  $\sigma_C$ . En effet, cette transformation ne fait qu'illustrer l'identité :

$$(a + k)_{l+m+n} = (a + k)_l(a + k + l)_m(a + k + l + m)_n .$$

(ii) la transformation consistant à décomposer une injection  $\sigma$  de  $A$  dans  $A + B$  en une injection  $\sigma_{A \setminus K}$  de  $A \setminus K$  dans  $A$  et une injection  $\sigma_K$  de  $K$  dans  $K + B$ , où  $K$  est un sous-ensemble de  $A$  contenant tous les éléments *non homogènes* (à savoir les éléments de  $A$  ayant leur image dans  $B$ ). Elle est définie de la façon suivante : chaque fois qu'une flèche de  $\sigma$  a son origine, disons  $\nu$ , dans  $K$  et son but dans  $A \setminus K$ , elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine dont le but est le premier itéré de  $\nu$  qui soit de nouveau dans  $K$ . On la note  $\Phi_2(A, B, K)$ . Evidemment, on a  $\text{cyc } \sigma = \text{cyc } \sigma_{A \setminus K} + \text{cyc } \sigma_K$ .

Lorsque  $K$  est restreint à l'ensemble des éléments non homogènes de  $\sigma$ , cette transformation ne fait qu'illustrer l'identité :

$$(a + n)_m = \sum_{k \geq 0}^{\min\{n,m\}} \binom{m}{k} (a + k)_{m-k} (n - k + 1)_k .$$

(iii) la transformation consistant à échanger deux graphes définie de la façon suivante : soit  $\varphi : A \rightarrow B$  une bijection entre deux ensembles finis; soient  $f : A \rightarrow S$  et  $g : B \rightarrow S$  deux applications. L'échange des graphes de  $f$  et  $g$  est obtenu en imposant sur  $A$  le graphe de  $g \circ \varphi$  et sur  $B$  celui de  $f \circ \varphi^{-1}$ . Autrement dit,  $(f, g) \rightarrow (g \circ \varphi, f \circ \varphi^{-1})$ .

Décrivons maintenant comment on effectue le passage

Figure 1  $\rightarrow$  Figure I  $\rightarrow$  Figure II  $\rightarrow$  Figure III  $\rightarrow$  Figure 2.

I. Soit  $E$  l'union des sommets des cycles de couleur 2 (pointillé) de  $(\sigma, f_\sigma)$ . Pour passer de Figure 1 à Figure I, on applique d'abord  $\Phi_1(D, A \setminus E, E)$  au graphe de  $\varphi$  (rectangle du haut) et on obtient le graphe de Figure 1'.

On note  $C'$  l'ensemble des buts des flèches ayant leurs origines dans  $C$  dans Figure 1'. On applique maintenant  $\Phi_1(D \setminus C', C')$  au rectangle de Figure 1' et

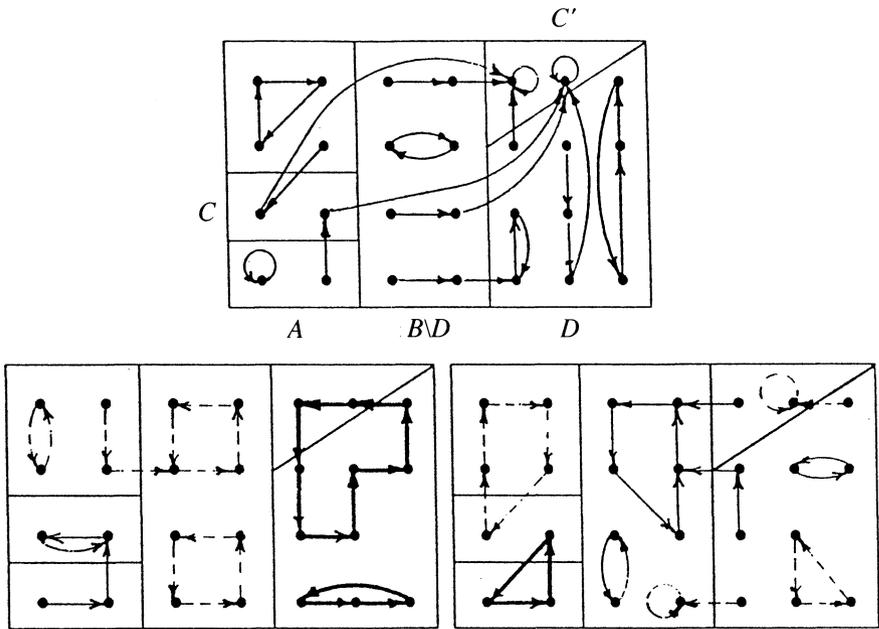


Figure I

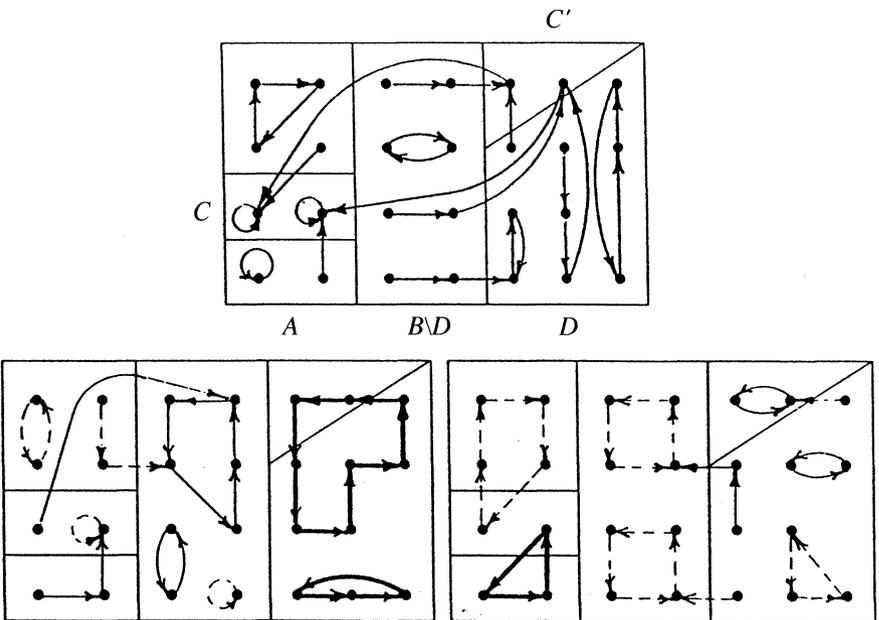


Figure II

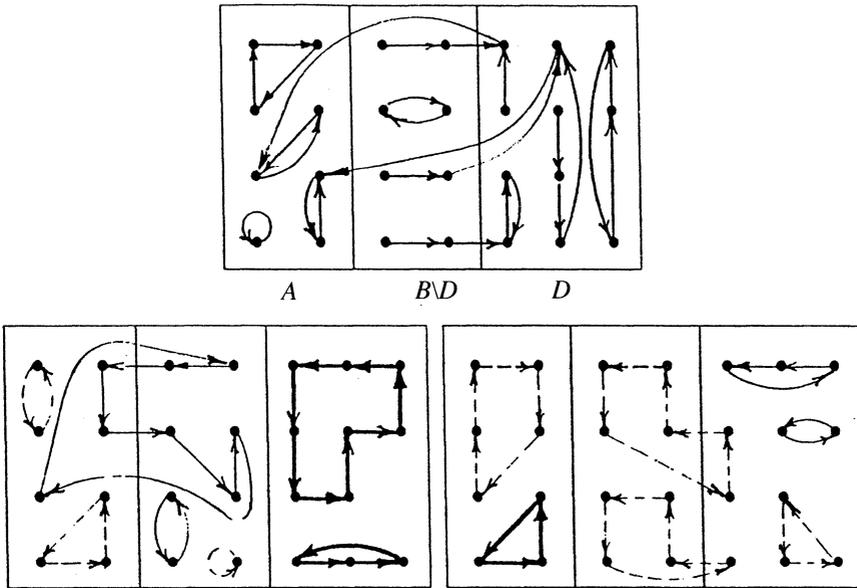


Figure III

simultanément  $\Phi_1(A \setminus C + D, C + B \setminus D)$  et  $\Phi_1(B \setminus D, C', D \setminus C')$  aux rectangles de gauche et de droite de Figure 1, respectivement. On obtient Figure I.

II. On échange maintenant les graphes de  $C$  et  $C'$  dans le rectangle *du haut* (cf. opération (iii)) de Figure I. Dans les deux rectangles *inférieurs*, on échange, d'une part, les deux sous-graphes situés dans la partie  $B \setminus D$ , d'autre part, le sous-graphe situé dans  $C$  du rectangle de gauche et celui situé dans  $C'$  du rectangle de droite. On obtient ainsi Figure II.

III. On applique ensuite  $\Phi_1^{-1}(A \setminus C, C)$  au rectangle *du haut*, et simultanément  $\Phi_1^{-1}(A \setminus C, C, B \setminus D)$  au rectangle *de gauche* et enfin  $\Phi_1^{-1}(B \setminus D, D \setminus C')$  et  $\Phi_1^{-1}(D \setminus C', C')$  au rectangle *de droite* de Figure II. On obtient Figure III.

IV. Soit  $K$  l'union des cycles de couleur 1 (fine) du rectangle *de droite* de Figure IV. Par définition  $C' \subset K$ . On applique d'abord  $\Phi_2(D, A, K)$  au rectangle *du haut*, en observant que  $C'$  est l'union des éléments non homogènes. Ceci donne le graphe de Figure III'.

On applique maintenant  $\Phi_1^{-1}(B \setminus D, D \setminus K, K)$  au rectangle de Figure III', puis  $\Phi_1^{-1}(B \setminus D, A)$  et  $\Phi_1(D \setminus K, K)$  au rectangle *de gauche* de Figure III. On trouve finalement Figure 2 du paragraphe 3.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. A. Al-Salam and J. L. Fields, *An identity for Double Hypergeometric Series* (Problem 85-24 proposed by Srivastava (H.M.)), SIAM Review, v. 28 (1986), p. 576-578.

2. W. Bailey, *The partial sum of the coefficients of the hypergeometric series*, J. London Math. Soc., v. 6 (1931), p. 40–41.
3. ———, *On one of Ramanujan's theorems*, J. London Math. Soc., v. 7 (1932), p. 34–36.
4. ———, *Generalized hypergeometric series*. Cambridge, The University Press, (1935).
5. H. B. C. Darling, *On a proof of one of Ramanujan's theorems*, J. London Math. Soc., v. 5 (1930), p. 8–9.
6. Dominique Foata and Volker Strehl, *Combinatorics of Laguerre polynomials*, Enumeration and Design [Waterloo, June–July 1982: D. M. Jackson and S. A. Vanstone, eds.], p. 123–140. (Toronto, Academic Press, 1984).
7. G. H. Hardy, *Ramanujan* (New York, Chelsea, 1940).
8. J. Hodgkinson, *Note on one of Ramanujan's theorems*, J. London Math. Soc., v. 6 (1931), p. 42–43.
9. F. H. Jackson, *On  $q$ -definite integrals*, Quart. J. Pure and Appl. Math., v. 41 (1910), p. 193–203.
10. J. T. Joichi and Dennis Stanton, *Bijective proofs of basic hypergeometric series identities*, Pacific J. Math., v. 127 (1987), p. 103–120.
11. Srinivasa Ramanujan, *Collected Papers* (New York, Chelsea, reprinted in 1962).
12. Lucy Joan Slater, *Generalized hypergeometric functions* (Cambridge, The University Press, 1966).
13. G. N. Watson, *Theorems stated by Ramanujan (VIII): Theorems on divergent series*, J. London Math. Soc., v. 4 (1929), p. 82–86.
14. ———, *The constants of Landau and Lebesgue*, Quarterly J. Math., v. 1 (1930), p. 310–318.
15. F. J. W. Whipple, *The sum of the coefficients of a hypergeometric series*, J. London Math. Soc., v. 5 (1930), p. 192.
16. Jet Wimp, *Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some applications*, Can. J. Math., v. 34 (1987), p. 983–1000.
17. Jiang Zeng, *Un modèle symétrique pour l'identité de Al-Salam-Fields, à paraître dans Discrete Math.*

*Département de mathématique,  
 Université Louis-Pasteur,  
 7, rue René-Descartes,  
 F-67084 Strausbourg, France.*